



online

Laboratorio

La conservazione dell'energia meccanica

MySocialBook

5. La legge di conservazione dell'energia

In questo capitolo presenteremo uno dei risultati più importanti di tutta la fisica: la legge di conservazione dell'energia. Per cominciare ci concentreremo sulla conservazione dell'energia meccanica, cioè dell'energia dovuta al moto di un corpo e all'azione di forze conservative.

Conservazione dell'energia meccanica

L'energia meccanica, E , di un sistema è definita come la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale:

Definizione di energia meccanica, E

$$E = K + U$$

L'energia meccanica *si conserva* nei sistemi che coinvolgono solo forze conservative. In situazioni nelle quali sono coinvolte forze non conservative, invece l'energia meccanica può variare, come avviene quando l'attrito causa riscaldamento, convertendo energia meccanica in energia termica; vedremo tuttavia che quando vengono considerate *tutte* le forme di energia, l'energia totale si conserva sempre.

Per verificare che E è costante nel caso di forze conservative, partiamo dal teorema dell'energia cinetica:

$$W = \Delta K = K_f - K_i$$

Supponiamo, per il momento, che nel sistema agisca una sola forza e che essa sia conservativa. In questo caso il lavoro W è legato all'energia potenziale dalla relazione:

$$W = -\Delta U = U_i - U_f$$

Confrontando le due espressioni, possiamo scrivere:

$$K_f - K_i = U_i - U_f$$

da cui, con un semplice passaggio, otteniamo:

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

cioè:

$$E_f = E_i$$

Poiché i punti iniziale e finale possono essere scelti arbitrariamente, ne consegue che E si conserva, cioè:

$$E = \text{costante}$$

Abbiamo così dimostrato che, se nel sistema agisce una forza conservativa, l'energia meccanica si conserva. Se nel sistema agiscono più forze conservative, basta sostituire a U la somma delle energie potenziali di ciascuna forza.

Riassumendo, possiamo enunciare la seguente legge di conservazione:

Conservazione dell'energia meccanica

In un sistema in cui agiscono solo forze conservative, l'energia meccanica E si conserva, cioè:

$$E = K + U = \text{costante}$$

La conservazione dell'energia meccanica significa che l'energia può essere trasformata da potenziale a cinetica e viceversa, ma la somma delle due energie rimane sempre la stessa.

Ad esempio, se consideriamo il disegno delle montagne russe riportato nella figura 14, possiamo osservare che l'energia potenziale gravitazionale diminuisce man mano che il vagoncino si avvicina al punto B e, contemporaneamente, la sua energia cinetica aumenta della stessa quantità, in modo tale che l'energia meccanica $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ rimane costante.

La legge di conservazione dell'energia meccanica, oltre ad avere un grande significato concettuale, permette di risolvere facilmente molti problemi di dinamica, come ora vedremo.

PROBLEM SOLVING



Conservazione dell'energia meccanica

Nei problemi che riguardano la conservazione dell'energia è utile schematizzare il sistema ed etichettare lo stato iniziale e lo stato finale con (i) e (f) rispettivamente. Per applicare la conservazione dell'energia scriviamo le energie iniziali e finali e poniamo $E_f = E_i$.

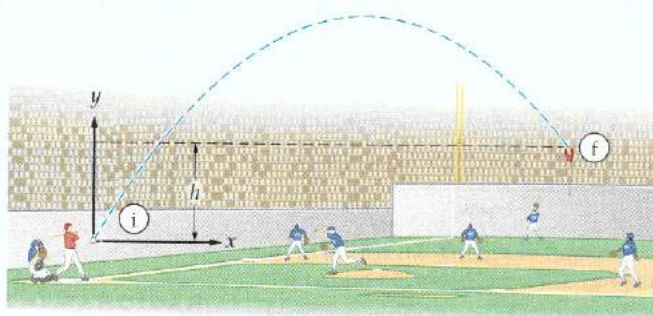
6. PROBLEMA Intercettare un fuori campo

Alla fine del nono inning, un giocatore di baseball spedisce una palla di 0,15 kg fuori campo. La palla lascia la mazza con una velocità di modulo 36 m/s e un tifoso sulla gradinata la afferra 7,2 m al di sopra del punto da cui è partita. Assumendo che le forze di attrito possano essere trascurate, determina:

- l'energia cinetica della palla quando viene afferrata dal tifoso;
- il modulo della sua velocità in quel punto.

DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

La figura mostra la traiettoria della palla. Indichiamo con (i) il punto in cui la palla viene colpita e con (f) il punto in cui viene afferrata. Nel punto (i) scegliamo $y_i = 0$, quindi nel punto (f) sarà $y_f = h = 7,2$ m. Sappiamo inoltre che la velocità iniziale è $v_i = 36$ m/s. Dobbiamo determinare K_f e v_f .



STRATEGIA

- Potendo trascurare le forze di attrito, l'energia meccanica iniziale è uguale a quella finale, cioè $K_i + U_i = K_f + U_f$. Usiamo questa equazione per determinare K_f .
- Nota K_f , dalla relazione $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ possiamo ricavare v_f .

SOLUZIONE

- Scriviamo i valori di U e K per il punto (i):

$$U_i = 0$$

$$K_i = \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}(0,15 \text{ kg})(36 \text{ m/s})^2 = 97 \text{ J}$$

Scriviamo i valori di U e K per il punto (f):

$$U_f = mgh = (0,15 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)(7,2 \text{ m}) = 11 \text{ J}$$

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Poniamo $K_i + U_i$ uguale a $K_f + U_f$ e risolviamo rispetto a K_f :

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$97 \text{ J} + 0 = K_f + 11 \text{ J}$$

$$K_f = 97 \text{ J} - 11 \text{ J} = 86 \text{ J}$$

- Utilizziamo $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ per determinare v_f :

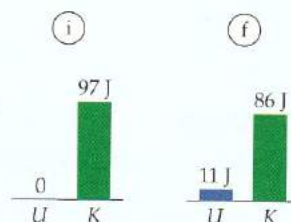
$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(86 \text{ J})}{0,15 \text{ kg}}} = 34 \text{ m/s}$$

OSSERVAZIONI

Per determinare il modulo della velocità della palla quando viene afferrata, dobbiamo conoscere l'altezza del punto (f), ma non ci serve nessuna informazione sulla traiettoria della palla. Ad esempio, non è necessario conoscere l'angolo con il quale la palla lascia la mazza o la massima altezza raggiunta dalla palla.

I due diagrammi a destra mostrano i valori di U e K nei punti (i) e (f). Notiamo che, nell'istante in cui la palla viene afferrata, l'energia del sistema è prevalentemente cinetica.



PROVA TU

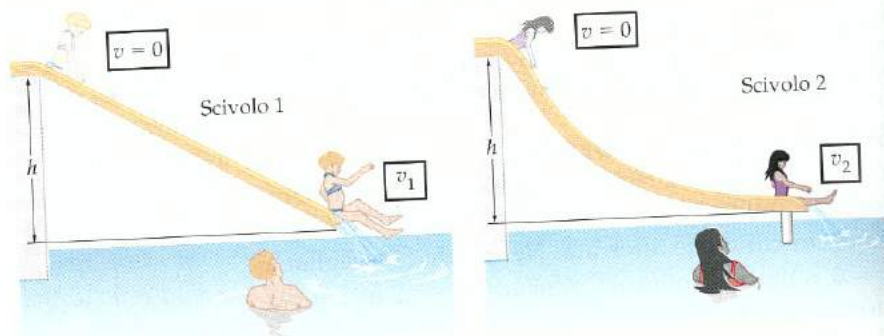
Se la massa della palla fosse maggiore, il modulo della velocità nel momento della presa sarebbe maggiore, minore o uguale a quello calcolato? [sarebbe uguale perché U e K dipendono dalla massa nello stesso modo e quindi la massa si semplifica]

Nella situazione proposta qui di seguito viene analizzato il legame fra la differenza delle altezze e il modulo della velocità.

2. RIFLETTI SUI CONCETTI **Confronta le velocità finali**

In un parco acquatico i nuotatori possono entrare nella vasca utilizzando uno dei due scivoli privi di attrito, di uguale altezza, mostrati in figura. Lo scivolo 1 raggiunge l'acqua con una pendenza uniforme; lo scivolo 2 è molto ripido all'inizio, poi diventa orizzontale. Se v_1 è la velocità al fondo dello scivolo 1 e v_2 è la velocità al fondo dello scivolo 2, allora:

- A $v_2 > v_1$
- B $v_2 < v_1$
- C $v_2 = v_1$



RAGIONAMENTO E DISCUSSIONE

In entrambi i casi la stessa quantità di energia potenziale, mgh , è convertita in energia cinetica. Poiché la trasformazione dell'energia potenziale gravitazionale in energia cinetica è l'unica trasformazione energetica che avviene, la velocità finale è la stessa per i due scivoli.

È interessante notare, però, che, sebbene le velocità finali siano le stesse, il tempo necessario per arrivare in acqua è minore per lo scivolo 2. Infatti il nuotatore 2 raggiunge un'alta velocità prima e la mantiene, mentre la velocità del nuotatore 1 aumenta lentamente e con continuità.

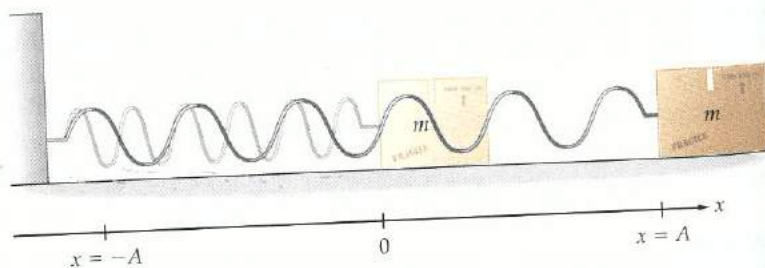
RISPOSTA

La risposta corretta è la C: $v_2 = v_1$.

Finora abbiamo applicato la legge di conservazione dell'energia meccanica a sistemi soggetti alla forza di gravità. Studiamo ora un sistema soggetto a un'altra forza conservativa, la forza elastica.

Consideriamo una massa attaccata a una molla orizzontale come in figura 16. La sua energia meccanica è la somma dell'energia cinetica, $K = \frac{1}{2}mv^2$, e dell'energia potenziale, $U = \frac{1}{2}kx^2$, cioè:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$



▲ FIGURA 16 Massa attaccata a una molla

Un corpo di massa m attaccato a una molla ideale oscilla attorno alla posizione di equilibrio $x = 0$. Il moto del corpo è un moto armonico semplice.

Poiché E rimane costante durante il moto, si ha un continuo scambio fra energia cinetica e potenziale.

Se la massa oscilla tra $x = -A$ e $x = +A$, la sua energia cinetica, quando si trova in questi due punti, è istantaneamente nulla e l'energia meccanica totale è uguale alla sola energia potenziale, che è $\frac{1}{2}kA^2$.

Ne concludiamo che nel moto armonico semplice della molla l'energia meccanica è data da:

Energia meccanica nel moto armonico semplice

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Conoscendo le leggi del moto di un oscillatore armonico, possiamo verificare direttamente la conservazione dell'energia meccanica. Ricordiamo che lo spostamento dalla posizione di equilibrio, x , e la velocità, v , di un oscillatore armonico sono:

$$x = A \cos(\omega t)$$

$$v = -A \sin(\omega t)$$

Sostituendo queste leggi nell'espressione dell'energia cinetica, $K = \frac{1}{2}mv^2$, e dell'energia potenziale, $U = \frac{1}{2}kx^2$, otteniamo:

$$\begin{aligned} E = K + U &= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t) = \\ &= \frac{1}{2}kA^2 [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] = \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned}$$

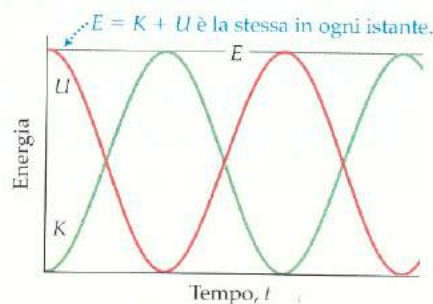
dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo utilizzato la relazione fondamentale della goniometria $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ per qualsiasi θ .

In figura 17 sono riportati i grafici di K e di U in funzione del tempo. La retta orizzontale in alto rappresenta E , cioè la somma di K e di U in ogni istante. In questo modo è evidente, anche graficamente, il continuo scambio fra energia cinetica e potenziale.

PROBLEM SOLVING

Energia potenziale e cinetica massima

Il valore massimo dell'energia potenziale di un sistema massa-molla è uguale al valore massimo dell'energia cinetica della massa. Quando il sistema ha la sua massima energia potenziale, l'energia cinetica della massa è nulla; quando la massa ha la sua massima energia cinetica, l'energia potenziale del sistema è nulla.



▲ FIGURA 17 Energia in funzione del tempo nel moto armonico semplice

La somma dell'energia potenziale U e dell'energia cinetica K è costante e uguale all'energia totale E . Osserviamo che, quando una delle due energie (U o K) ha il suo valore massimo, l'altra è uguale a zero.

7. PROBLEMA Ferma il blocco!

Un blocco di 0,980 kg, che scivola su una superficie orizzontale priva di attrito con una velocità di 1,32 m/s, finisce contro una molla a riposo, di costante elastica $k = 245$ N/m, come mostrato in figura.

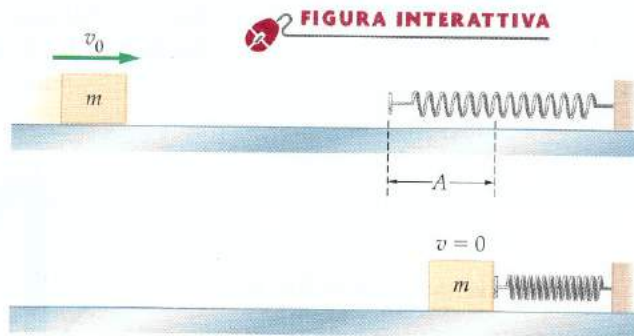
- Di quanto viene compressa la molla prima che il blocco si fermi?
- Per quanto tempo il blocco rimane a contatto con la molla prima di fermarsi?

DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Come mostra la figura, inizialmente l'energia del sistema è solamente cinetica ed è quella del blocco di massa $m = 0,980$ kg e velocità $v_0 = 1,32$ m/s. Quando il blocco si ferma momentaneamente, dopo aver compresso la molla di un tratto A , la sua energia cinetica è stata trasformata in energia potenziale della molla.

STRATEGIA

- Possiamo determinare la compressione A della molla utilizzando la conservazione dell'energia. Poniamo l'energia cinetica iniziale del blocco, $\frac{1}{2}mv_0^2$, uguale all'energia potenziale della molla, $\frac{1}{2}kA^2$, e ricaviamo A .
- Se la massa fosse agganciata alla molla, completerebbe un'oscillazione nel tempo $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Nel muoversi dalla posizione di equilibrio alla posizione di massima compressione, la massa esegue $\frac{1}{4}$ di ciclo, perciò il tempo è $T/4$.



SOLUZIONE

a) Poniamo l'energia cinetica iniziale del blocco uguale all'energia potenziale della molla:

Ricaviamo la massima compressione A :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$A = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} = (1,32 \text{ m/s})\sqrt{\frac{0,980 \text{ kg}}{245 \text{ N/m}}} = 0,0835 \text{ m}$$

b) Calcoliamo il periodo di un'oscillazione:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,980 \text{ kg}}{245 \text{ N/m}}} = 0,397 \text{ s}$$

Dividiamo T per quattro, poiché il blocco è stato a contatto della molla per $\frac{1}{4}$ di oscillazione:

$$t = \frac{1}{4}T = \frac{1}{4}(0,397 \text{ s}) = 0,0993 \text{ s}$$

OSSERVAZIONI

Se la superficie orizzontale fosse stata ruvida, parte dell'energia cinetica iniziale del blocco sarebbe stata trasformata in energia termica; in questo caso la massima compressione della molla sarebbe stata minore di quella appena calcolata.

PROVA TU

Se la velocità iniziale della massa viene aumentata, il tempo necessario per fermarla aumenta, diminuisce o resta lo stesso? Verifica la risposta, calcolando il tempo per una velocità iniziale di 1,50 m/s.

[il tempo rimane lo stesso; $t = 0,0993 \text{ s}$]

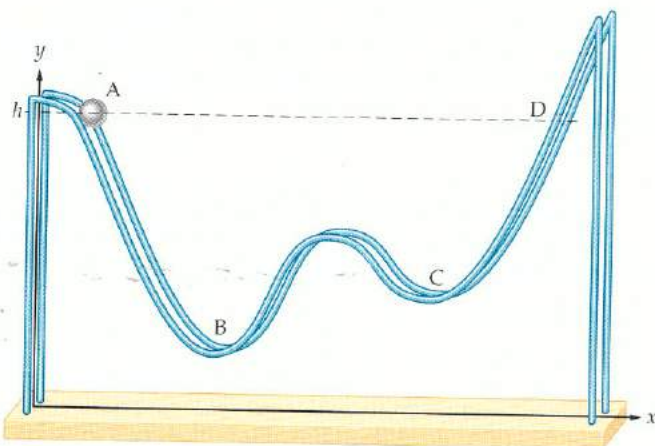
Grafici dell'energia

La figura 18 mostra una palla metallica che rotola su una pista simile a quella di una montagna russa. Inizialmente la palla è ferma nel punto A. Poiché l'altezza nel punto A è $y = h$, l'energia meccanica iniziale della palla è $E_0 = mgh$. Se l'attrito e le altre forze non conservative possono essere trascurati, l'energia meccanica della palla rimane fissata al valore E_0 per tutta la durata del suo moto. Perciò:

$$E = K + U = E_0$$

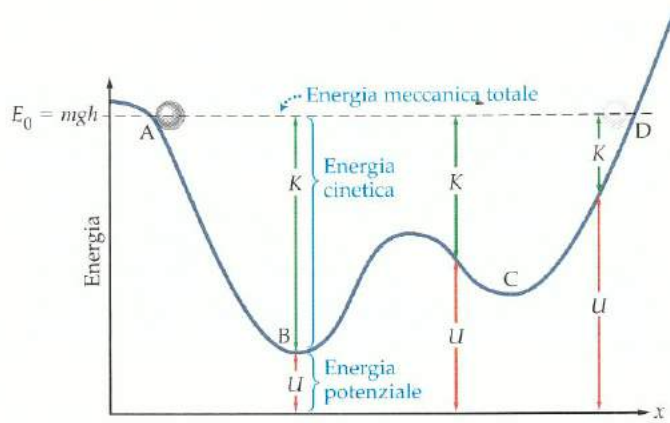
Quando la palla si muove, la sua energia potenziale di volta in volta diminuisce e aumenta, seguendo l'andamento della pista. Infatti l'energia potenziale gravitazionale, $U = mgy$, è direttamente proporzionale all'altezza y della pista; in un certo senso, quindi, la pista stessa rappresenta il grafico della corrispondente energia potenziale.

Ciò è mostrato chiaramente in figura 19 nella quale l'energia è riportata sull'asse verticale e la posizione x sull'asse orizzontale; come si vede, l'andamento dell'energia potenziale U riproduce proprio quello della pista di figura 18. Nel grafico abbiamo tracciato anche una linea orizzontale corrispondente al valore E_0 , che rappresenta l'energia costante della palla durante il moto. Poiché la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica deve essere sempre uguale a E_0 , l'energia cinetica K è la differenza fra l'energia totale E_0 e l'energia potenziale individuata sulla curva, come mostrato in figura 19.



► **FIGURA 18** Palla che rotola su una pista priva di attrito

La palla parte da A, dove $y = h$, con velocità uguale a zero. La sua velocità è massima nel punto B; in D, dove è ancora $y = h$, la sua velocità ritorna a zero.



◀ **FIGURA 19** Grafico dell'energia potenziale gravitazionale in funzione della posizione per la pista di figura 18

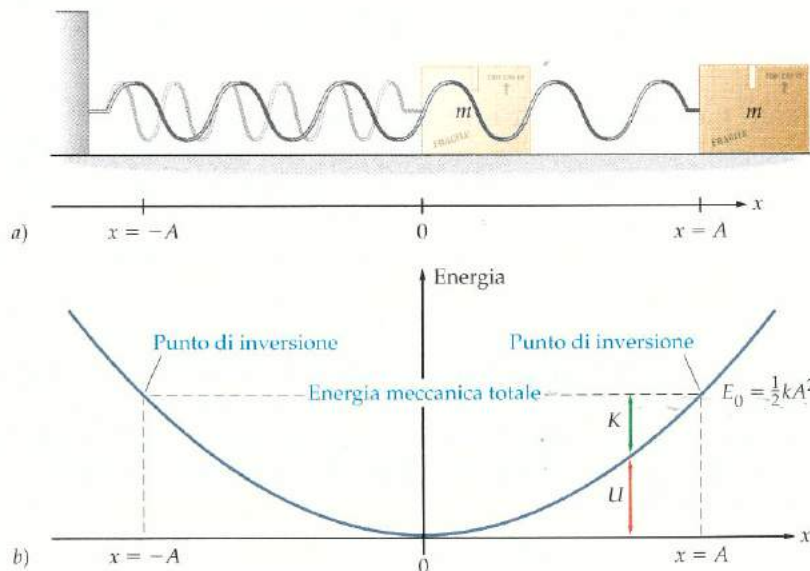
L'andamento della curva dell'energia potenziale è esattamente lo stesso di quello della pista. In questo caso, l'energia meccanica totale è fissata al suo valore iniziale, $E_0 = K + U = mgh$. Poiché l'altezza della curva in ogni punto è per definizione uguale a U , l'energia cinetica K è la distanza fra la curva e la linea tratteggiata in corrispondenza di $E_0 = mgh$. Osserviamo che K ha il valore massimo in B e si annulla in A e D, cioè nei punti di inversione del moto.

L'analisi di un grafico dell'energia, come quello di figura 19, fornisce una gran quantità di informazioni sul moto di un oggetto. Ad esempio, nel punto B l'energia potenziale ha il suo valore minimo e perciò l'energia cinetica ha in quel punto il suo massimo valore, mentre nel punto C l'energia potenziale inizia di nuovo ad aumentare, determinando quindi una corrispondente diminuzione dell'energia cinetica. Man mano che la palla prosegue nel moto verso destra, l'energia potenziale continua a crescere finché, nel punto D, raggiunge di nuovo un valore uguale all'energia totale E_0 ; in questo punto l'energia cinetica è zero e la palla si ferma per un istante, quindi comincia a muoversi verso sinistra, ritornando al punto A dove si ferma ancora, cambia direzione e inizia un nuovo ciclo. I punti A e D vengono chiamati **punti di inversione del moto**. Le regioni a sinistra di A e a destra di D sono inaccessibili alla palla, perché in esse l'energia potenziale è maggiore dell'energia totale, cioè l'energia cinetica diventerebbe negativa, il che non è possibile.

Osserviamo punti di inversione anche nel moto oscillatorio di una massa attaccata a una molla, come nel caso mostrato in figura 20a, nel quale una massa, allungata sino alla posizione $x = A$, viene poi rilasciata da ferma; in figura 20b è riportata l'energia potenziale del sistema, $U = \frac{1}{2}kx^2$.

Far partire il sistema in questo modo fornisce un'energia iniziale $E_0 = \frac{1}{2}kA^2$, indicata dalla linea orizzontale. Man mano che la massa si muove verso sinistra, il modulo della sua velocità cresce, raggiungendo un massimo nel punto in cui l'energia potenziale è minima, cioè in $x = 0$. Se non agiscono forze non conservative, la massa continua a muoversi fino a $x = -A$, dove si ferma momentaneamente prima di ritornare in $x = A$.

Nel problema che segue utilizziamo il grafico dell'energia per determinare la velocità di un oggetto per un dato valore di x .



◀ **FIGURA 20** Massa attaccata a una molla

a) Una molla è allungata di un tratto A e ciò le fornisce un'energia potenziale $U = \frac{1}{2}kA^2$. b) Curva dell'energia potenziale, $U = \frac{1}{2}kx^2$, per la molla. Poiché la massa parte da ferma, la sua energia meccanica iniziale è $E_0 = \frac{1}{2}kA^2$. La massa oscilla tra $x = A$ e $x = -A$.

8. PROBLEMA Un problema di potenziale

Un oggetto di 1,60 kg si muove lungo l'asse x in un sistema conservativo in cui l'energia potenziale U segue l'andamento mostrato in figura. Un esempio fisico di una simile situazione potrebbe essere una perlina che scivola lungo un filo che ha la forma della curva dell'energia potenziale. Se il modulo della velocità dell'oggetto in $x = 0$ è 2,30 m/s, qual è il modulo della sua velocità in $x = 2,00$ m?

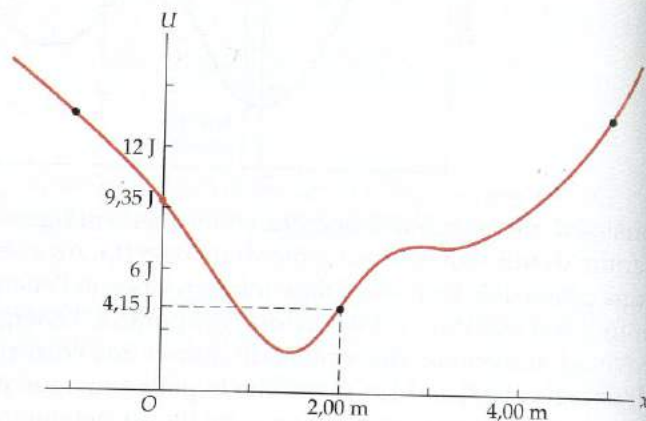
DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Il grafico mostra l'andamento di U in funzione di x . I valori di U in $x = 0$ e in $x = 2,00$ m sono, rispettivamente, 9,35 J e 4,15 J. Ne consegue che la velocità dell'oggetto in $x = 2,00$ m sarà maggiore di quella in $x = 0$.

STRATEGIA

Dal momento che l'energia meccanica si conserva, sappiamo che l'energia totale ($K_i + U_i$) in $x = 0$ è uguale all'energia totale ($K_f + U_f$) in $x = 2,00$ m.

Il testo del problema fornisce U_i come dato e, conoscendo anche la velocità in $x = 0$, possiamo utilizzare la relazione $K = \frac{1}{2}mv^2$ per calcolare la corrispondente energia cinetica K_i . In $x = 2,00$ m conosciamo l'energia potenziale U_f , quindi possiamo utilizzare $K_i + U_i = K_f + U_f$ per ricavare K_f . Nota l'energia cinetica finale, è possibile determinare il modulo della velocità finale utilizzando ancora una volta $K = \frac{1}{2}mv^2$.



SOLUZIONE

Determiniamo U_i , K_i e $E_i = K_i + U_i$ in $x = 0$:

$$U_i = 9,35 \text{ J}$$

$$K_i = \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}(1,60 \text{ kg})(2,30 \text{ m/s})^2 = 4,23 \text{ J}$$

$$E_i = K_i + U_i = 4,23 \text{ J} + 9,35 \text{ J} = 13,58 \text{ J}$$

Scriviamo le espressioni di U_f , K_f e $E_f = K_f + U_f$ in $x = 2,00$ m:

$$U_f = 4,15 \text{ J}$$

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$E_f = K_f + U_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + 4,15 \text{ J}$$

Poniamo E_f uguale a E_i :

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + 4,15 \text{ J} = 13,58 \text{ J}$$

Risolviamo rispetto a v_f e sostituiamo il valore della massa dell'oggetto:

$$v_f = \sqrt{\frac{2(13,58 \text{ J} - 4,15 \text{ J})}{m}} = \sqrt{\frac{2(13,58 \text{ J} - 4,15 \text{ J})}{1,60 \text{ kg}}} = 3,43 \text{ m/s}$$

OSSERVAZIONI

Come vediamo nel primo passaggio, l'energia meccanica totale del sistema è 13,58 J; quindi i punti di inversione del moto dell'oggetto si trovano in corrispondenza dei valori di x per i quali $U = 13,58$ J (pallini neri nel grafico).

PROVA TU

Utilizzando il grafico dato, stima la posizione dei punti di inversione del moto per questo oggetto.

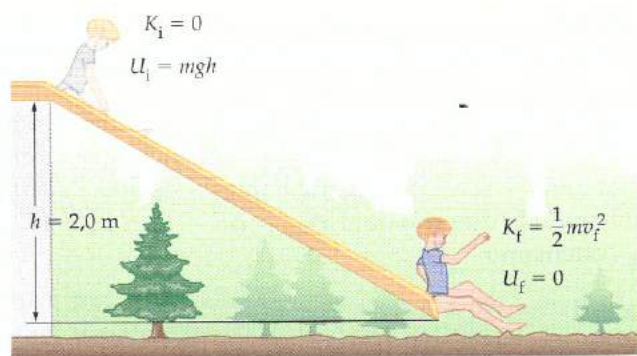
$$[x = -1,00 \text{ m e } x = 5,00 \text{ m}]$$

Conservazione dell'energia totale

Se un sistema è soggetto all'azione di forze non conservative, la sua energia meccanica varia.

Supponiamo ad esempio che un bambino scenda giù da uno scivolo alto 2,0 m partendo da fermo, come mostrato in figura 21. Se l'energia meccanica si conservasse, dovremmo avere:

$$E_f = E_i \quad \text{cioè} \quad K_f + U_f = K_i + U_i$$



◀ FIGURA 21 Sistema in cui agiscono forze non conservative

Se il sistema fosse conservativo tutta l'energia potenziale iniziale si trasformerebbe in energia cinetica al termine della discesa. In realtà, poiché il sistema è non conservativo, una parte dell'energia meccanica si trasforma in energia termica dovuta all'attrito.

All'inizio l'energia cinetica del bambino è nulla, $K_i = 0$, mentre la sua energia potenziale gravitazionale è $U_i = mgh$. All'arrivo a terra, l'energia potenziale è nulla, $U_f = 0$, e l'energia cinetica è $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$. Sostituendo le espressioni delle energie cinetica e potenziale nella legge di conservazione dell'energia meccanica otteniamo:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$$

da cui, risolvendo rispetto a v_f , possiamo calcolare la velocità finale del bambino:

$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,8 \text{ m/s}^2)(2,0 \text{ m})} = 6,3 \text{ m/s}$$

In realtà l'esperienza ci dice che la velocità finale è decisamente inferiore (in alcuni casi persino nulla) e dipende dalla massa del bambino. Il motivo è che, in questo caso, la legge di conservazione dell'energia meccanica non è valida, perché sul bambino agisce una forza non conservativa, l'attrito. Qual è il bilancio dell'energia in questo caso? Il bambino è sottoposto a una forza conservativa, la forza di gravità, che compie un lavoro W_c , e a una forza non conservativa, l'attrito, che compie un lavoro W_{nc} . Il lavoro totale compiuto sul bambino è pertanto:

$$W_{\text{tot}} = W_c + W_{nc}$$

e, per il teorema delle forze vive, è uguale alla variazione dell'energia cinetica del bambino:

$$W_{\text{tot}} = \Delta K = K_f - K_i$$

Il lavoro della forza di gravità, W_c , è legato alla variazione dell'energia potenziale del bambino, $\Delta U = U_f - U_i$, dalla relazione:

$$W_c = -\Delta U = U_i - U_f$$

Sostituendo le ultime due equazioni in $W_{\text{tot}} = W_c + W_{nc}$ otteniamo:

$$\Delta K = -\Delta U + W_{nc}$$

da cui, ricaviamo W_{nc} :

$$W_{nc} = \Delta K + \Delta U = \Delta E = E_f - E_i$$

La variazione dell'energia meccanica del bambino è dunque uguale al lavoro compiuto dall'attrito. L'esperienza mostra che l'energia meccanica del bambino diminuisce, $E_f < E_i$; il lavoro della forza d'attrito è infatti negativo, dal momento che questa forza si oppone allo spostamento.

In realtà, l'energia iniziale del bambino non è andata persa: si è solo in parte trasformata in un'altra forma, non meccanica, di energia: l'energia termica del bambino e dello scivolo. Ce ne accorgiamo notando che, dopo la discesa, la temperatura del bambino e la temperatura dello scivolo sono lievemente aumentate.

In generale il lavoro della forza non conservativa, W_{nc} , produce una variazione, di segno opposto, dell'energia interna E_{int} (di natura termica, chimica, ecc.) dei corpi, cioè:

$$W_{nc} = -\Delta E_{\text{int}}$$

Il lavoro negativo della forza d'attrito produce una variazione positiva, cioè un aumento, dell'energia interna (in questo caso, di natura termica) del bambino e dello scivolo.

Il fatto che l'energia meccanica del bambino si sia convertita in parte in energia termica dello scivolo ci induce a considerare il bilancio di energia del sistema complessivo bambino + scivolo. Rispetto a questo sistema l'attrito è una forza interna. Combinando le due relazioni $W_{nc} = \Delta E = E_f - E_i$ e $W_{nc} = -\Delta E_{int} = E_{int,f} - E_{int,i}$, otteniamo:

$$\Delta E + \Delta E_{int} = 0 \rightarrow E_f + E_{int,f} = E_i + E_{int,i}$$

dove $E_{i,f}$ e $E_{int,i}$ sono l'energia meccanica e l'energia interna del sistema bambino + scivolo.

Come si vede, sebbene l'energia meccanica non si conservi, l'energia totale, cioè la somma dell'energia meccanica e dell'energia interna, rimane costante. Ciò avviene tutte le volte che un sistema fisico è **isolato**, vale a dire non soggetto a forze esterne non conservative (l'effetto di una forza esterna conservativa può essere sempre riassorbito in una variazione dell'energia potenziale dei componenti del sistema; ad esempio, nel caso in esame, sia il bambino sia lo scivolo sono soggetti alla forza di gravità, che produce una variazione ΔU dell'energia potenziale del bambino).

Possiamo formulare la **legge di conservazione dell'energia totale** come segue:

Legge di conservazione dell'energia totale

L'energia totale $E_{tot} = E + E_{int}$ di un sistema isolato si conserva:

$$\Delta E_{tot} = \Delta E + \Delta E_{int} = 0 \rightarrow E_i + E_{int,i} = E_f + E_{int,f}$$

La legge di conservazione dell'energia totale per un sistema isolato è illustrata in figura 22a.

Se il sistema non è isolato, ma è soggetto a forze esterne non conservative che compiono un lavoro W_{est} (fig. 22b), la sua energia totale non è costante, ma varia di una quantità pari a W_{est} :

$$W_{est} = \Delta E_{tot}$$

Scrivendo questa relazione in forma esplicita otteniamo l'equazione dell'energia del sistema:

Equazione dell'energia di un sistema

$$W_{est} = \Delta E_{tot} = \Delta E + \Delta E_{int} = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{int}$$

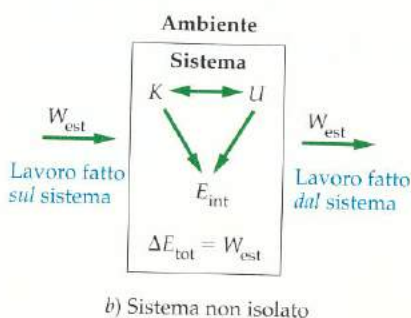
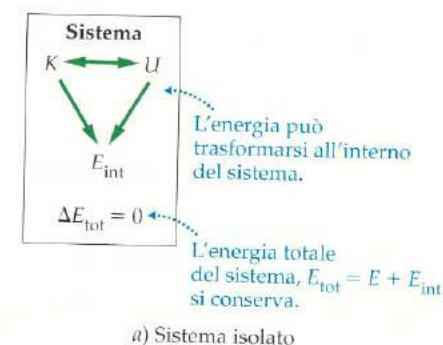
Questa è la forma più generale che il bilancio di energia di un sistema può assumere. Come casi particolari ritroviamo le leggi di conservazione enunciate in precedenza:

- $W_{est} = 0 \rightarrow \Delta E_{tot} = 0$ conservazione dell'energia totale
- $W_{est} = 0$ e $\Delta E_{int} = 0 \rightarrow \Delta E = 0$ conservazione dell'energia meccanica

Come vedremo in seguito, oltre al lavoro meccanico W_{est} , c'è un altro modo in cui un sistema può scambiare energia con l'ambiente: il **calore**. Il calore, indicato abitualmente con Q , è il trasferimento di energia che si verifica quando il sistema e l'ambiente hanno temperature diverse. L'equazione dell'energia del sistema va allora modificata aggiungendo al lavoro W_{est} il calore Q :

$$W_{est} + Q = \Delta E_{tot}$$

Si entra così nel campo della termodinamica, che studieremo nel capitolo 9.



▲ FIGURA 22 Conservazione dell'energia totale

a) Se il sistema è isolato, l'energia totale si conserva. b) Se il sistema non è isolato, cioè se su di esso agiscono forze esterne non conservative, l'energia totale del sistema non si conserva, ma varia di una quantità pari al lavoro W_{est} compiuto dalle forze esterne.

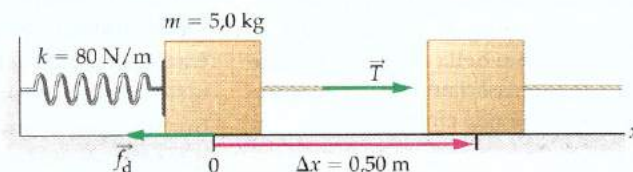
9. PROBLEMA Allungare una molla

Una scatola di 5,0 kg è attaccata a un'estremità di una molla di costante elastica $k = 80 \text{ N/m}$. L'altra estremità della molla è fissata al muro. Inizialmente la scatola è ferma nella posizione di equilibrio della molla. Una corda con una tensione costante $T = 100 \text{ N}$ tira la scatola allungando la molla, come mostrato in figura. Il coefficiente di attrito dinamico tra la scatola e il pavimento è $\mu_d = 0,30$. Qual è la velocità della scatola dopo che si è spostata di 50 cm?

DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Consideriamo il sistema costituito dalla scatola di massa $m = 5,0 \text{ kg}$, dalla molla e dal pavimento. È necessario includere nel sistema il pavimento perché l'attrito modifica l'energia interna sia della scatola sia del pavimento. La forza di attrito è $f_d = \mu_d mg \Delta x$, dove $\Delta x = 0,50 \text{ m}$ è lo spostamento della scatola, e compie un lavoro W_{nc} .

La tensione T della corda è una forza esterna non conservativa che compie un lavoro W_{est} . Questo lavoro fa sì che l'energia totale del sistema, $E_{tot} = K + U + E_{int}$, aumenti. L'energia cinetica e l'energia potenziale elastica della scatola sono all'inizio entrambe nulle, perché la scatola è ferma nella posizione di equilibrio.



STRATEGIA

Scriviamo l'equazione dell'energia del sistema, $W_{est} = \Delta E_{tot} = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{int}$. La variazione dell'energia interna è data da $\Delta E_{int} = -W_{nc}$. Calcoliamo il lavoro della corda, $W_{est} = T\Delta x$, il lavoro della forza di attrito, $W_{nc} = -f_d \Delta x$, e la variazione dell'energia potenziale elastica della scatola attaccata dalla molla, ΔU . Sostituendo queste quantità nell'equazione dell'energia, ricaviamo la variazione di energia cinetica della scatola e, da questa, la velocità finale della scatola.

SOLUZIONE

Calcoliamo il lavoro compiuto dalla corda:

$$W_{est} = T\Delta x = (100 \text{ N})(0,50 \text{ m}) = 50 \text{ J}$$

Calcoliamo la variazione dell'energia interna:

$$\begin{aligned} \Delta E_{int} &= -W_{nc} = f_d \Delta x = \mu_d mg \Delta x = \\ &= (0,30)(5,0 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(0,50 \text{ m}) = 7,4 \text{ J} \end{aligned}$$

La variazione dell'energia potenziale elastica del sistema è:

$$\Delta U = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = (0,5)(80 \text{ N/m})(0,50 \text{ m})^2 = 10 \text{ J}$$

Dall'equazione dell'energia $W_{est} = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{int}$ ricaviamo la variazione dell'energia cinetica:

$$\Delta K = W_{est} - \Delta U - \Delta E_{int}$$

Sostituendo i valori calcolati di W_{est} , ΔU e ΔE_{int} otteniamo:

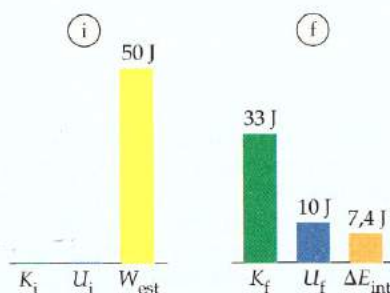
$$\begin{aligned} \Delta K &= W_{est} - \Delta U - \Delta E_{int} = \\ &= 50 \text{ J} - 10 \text{ J} - 7,4 \text{ J} = 33 \text{ J} \end{aligned}$$

Poiché la velocità iniziale v_i della scatola è zero, la sua variazione di energia cinetica ΔK è uguale all'energia cinetica finale, $\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2$. Ricaviamo v_f e sostituiamo il valore di ΔK precedentemente calcolato:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\Delta K}{m}} = \sqrt{\frac{2(33 \text{ J})}{5,0 \text{ kg}}} = 3,6 \text{ m/s}$$

OSSERVAZIONI

Il bilancio dell'energia è rappresentato nel diagramma riportato a fianco. Il lavoro compiuto dalla tensione nella corda (50 J) si trasforma per il 66% in energia cinetica (33 J), per il 20% in energia potenziale (10 J) e per il 14% in energia interna, in questo caso termica (7,4 J).



PROVA TU

Se la costante elastica della molla fosse 40 N/m, quale sarebbe la velocità finale della scatola?

[$v_f = 3,9 \text{ m/s}$]