IL MOMENTO ANGOLARE

Fino a questo punto abbiamo esaminato soltanto moti di traslazione. Passiamo ora a esaminare i moti di rotazione.

▶ Se gli attriti sono trascurabili, una ruota di bicicletta messa in rotazione può continuare a girare a lungo attorno al proprio asse.

A

▶ Anche un satellite, in orbita circolare fuori dall'atmosfera terrestre, continua a muoversi per molti anni senza rallentare.

B

Per descrivere la rotazione di un punto materiale si introduce una nuova grandezza fisica, il **momento angolare** $\vec{L}$ calcolato rispetto a un punto fisso O. Come vedremo nel prossimo paragrafo, la conservazione di questo vettore spiega come mai la ruota di una bicicletta e il satellite tendano a continuare nel loro moto di rotazione senza fermarsi.

Consideriamo una particella di massa m che si muove con velocità $\vec{v}$ e che, a un certo istante, si trova nel punto P; inoltre indichiamo con $\vec{r}$ il vettore che congiunge O con P, cioè il vettore che dà la posizione di P rispetto al punto O (figura 13).

Possiamo dare la definizione che segue:

Il **momento angolare** di una particella è uguale al prodotto vettoriale tra il vettore $\vec{r}$ e la quantità di moto $\vec{p}$ della particella:

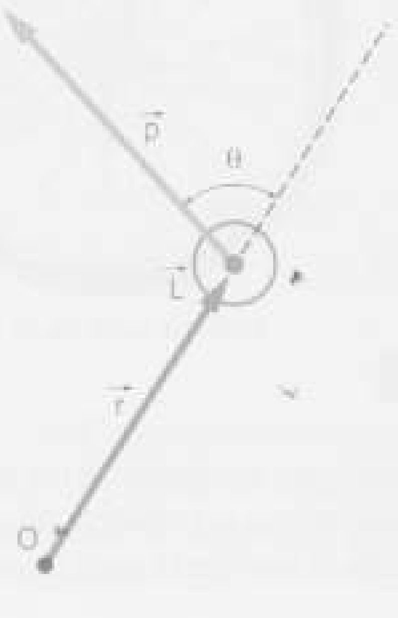
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{15}$$

Per la definizione di prodotto vettoriale, il momento angolare ha

- direzione perpendicolare al piano che contiene $\vec{r}$ e $\vec{p}$;
- verso dato dalla regola della mano destra, con $\vec{r}$ rivolta come il pollice e $\vec{p}$ che segue le altre dita (figura 14);
- modulo L dato dalle formule:

$$L = rp_{\perp} = r_{\perp}p = rp \operatorname{sen} \theta, \tag{16}$$

dove θ è l'angolo formato tra il vettore $\vec{r}$ e il vettore $\vec{p}$.



Il punto O
Come succede per il momento di una forza, anche il momento angolare dipende dal punto O rispetto al quale lo si calcola.

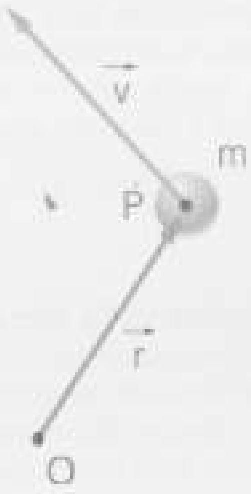


Figura 13 Vettori $\vec{r}$ e $\vec{v}$ che permettono di definire il momento angolare $\vec{L}$.

Direzione e verso di $\vec{p}$
Ricorda che $\vec{p} = m\vec{v}$. Quindi, la direzione e il verso di $\vec{p}$ sono quelli di $\vec{v}$.

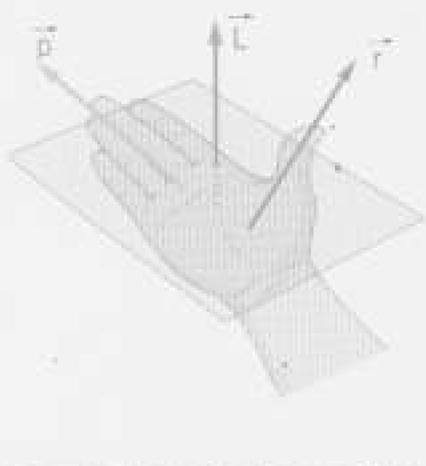


Figura 14 Regola della mano destra per il verso del momento angolare $\vec{L}$.

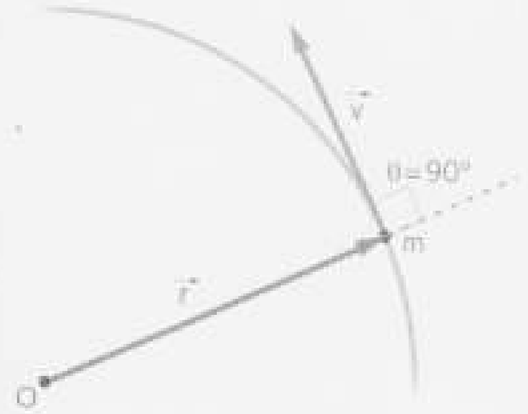


Figura 15 Nel moto circolare il vettore $\vec{r}$ è perpendicolare al vettore $\vec{p} = m\vec{v}$.

Il caso più semplice è quello in cui l'angolo θ è retto.

Ciò accade, per esempio, se si calcola il momento angolare di un punto materia[le] che si muove di moto circolare, scegliendo come punto O il centro della traiettori[a] circolare (figura 15).

Visto che vale la relazione sen 90° = 1, nel caso θ = 90° la formula (16) diviene:

$$L = rp \operatorname{sen} \theta = rp = rmv. \qquad (17)$$

Il momento angolare di un sistema fisico è dato dalla somma vettoriale dei momen[ti] angolari dei corpi che compongono il sistema, calcolati rispetto allo stesso punto O.

Le dimensioni fisiche del momento angolare sono $[m \cdot l^2 \cdot t^{-1}]$: quindi, nel Siste[-]ma Internazionale esso si misura in (kg · m²/s).

9 CONSERVAZIONE E VARIAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Consideriamo un sistema fisico e calcoliamo il suo momento angolare rispetto a un punto O fisso.

Forze interne
Gli effetti delle forze interne al sistema si annullano a due a due. Quindi esse non possono variare il momento angolare totale.

> Il momento angolare di un sistema di corpi si conserva nel tempo se è nullo il momento totale delle *forze esterne* che agiscono su di esso.

Momento della forza
Abbiamo introdotto il momento della forza nel paragrafo 7 del capitolo «Applicazioni dei principi della dinamica».

Nei due esempi considerati prima i momenti delle forze esterne sono nulli e quindi i momenti angolari si conservano. Infatti:

▶ sulla ruota di bicicletta agisce la sua forza-peso $\vec{F}_P$, applicata nel suo baricentro, che è proprio nel centro di rotazione. Quindi il braccio del momento della forza-peso è nullo e il momento è nullo.

▶ Sul satellite agisce la forza di gravità $\vec{F}$ dovuta al pianeta. Anche in questo caso il braccio di $\vec{F}$, rispetto al centro di rotazione è uguale a zero e, quindi, il suo momento è nullo.

Il momento angolare è un vettore, come la quantità di moto. E, come in quel caso, quando esso si conserva non rimane invariato solo il suo modulo, ma sono costanti anche la sua direzione e il suo verso.

Così, se gli attriti sono trascurabili, la ruota di bicicletta in rotazione non solo tende a ruotare sempre con la stessa frequenza, ma anche nello stesso piano: così il vettore momento angolare, che ha la direzione dell'asse di rotazione della ruota, rimane invariato.

Questa proprietà entra in gioco quando si viaggia in bicicletta: come si è appena detto, la conservazione del momento angolare tende a fare ruotare le ruote sempre nello stesso piano (figura 16) e ciò aiuta a rimanere in equilibrio. In particolare, il modulo di $\vec{L}$ aumenta se aumenta la velocità di rotazione delle ruote: ciò contribuisce a spiegare come mai è più facile mantenere la bicicletta in equilibrio se si procede ad alta velocità.

Figura 16 La conservazione di $\vec{L}$ aiuta a rimanere in equilibrio la bicicletta.

Il giroscopio è uno strumento concettualmente simile a una trottola o alla ruota di bicicletta. Una volta posto in rotazione, per la conservazione del momento angolare esso tende a mantenere sempre lo stesso asse di rotazione rispetto a un sistema di riferimento inerziale, quale il sistema ICR.

Grazie a queste proprietà è utilizzato da molto tempo per la realizzazione di strumenti di controllo della navigazione marina e aerea; per esempio: la *girobussola* indica in ogni istante il Nord vero (non quello magnetico, indicato dalla bussola ad ago magnetico) proprio grazie a un giroscopio posto al suo interno.

Come altro esempio, il monopattino elettrico permette al suo occupante di rimanere in equilibrio senza difficoltà su due ruote affiancate. Ciò è reso possibile dal fatto che all'interno del dispositivo si trovano almeno tre giroscopi elettronici (uno per ogni asse cartesiano dello spazio tridimensionale) che controllano l'orientazione spaziale del monopattino; una serie di processori interroga 100 volte al secondo i giroscopi e invia ai motori elettrici delle ruote le istruzioni di movimento che servono a mantenere l'equilibrio.

La variazione del momento angolare

Se sul sistema agisce un momento della forza $\vec{M}$ per un intervallo di tempo Δt, la variazione del suo momento angolare è data dalla formula:

$$\underbrace{\Delta\vec{L}}_{\text{variazione del momento angolare (kg·m}^2\text{/s)}} = \overbrace{\vec{M}}^{\text{momento torcente (N·m)}}\underbrace{\Delta t}_{\text{intervallo di tempo (s)}} \qquad (18)$$

La formula (**18**) è l'analogo, per le rotazioni, del teorema dell'impulso che vale per i moti di traslazione. Essa stabilisce che il momento angolare di un sistema meccanico si conserva (cioè si ha $\Delta\vec{L} = 0$) quando è nullo il momento delle forze esterne applicate al sistema. Altrimenti la variazione di $\vec{L}$ è uguale al prodotto $M\,\Delta t$.

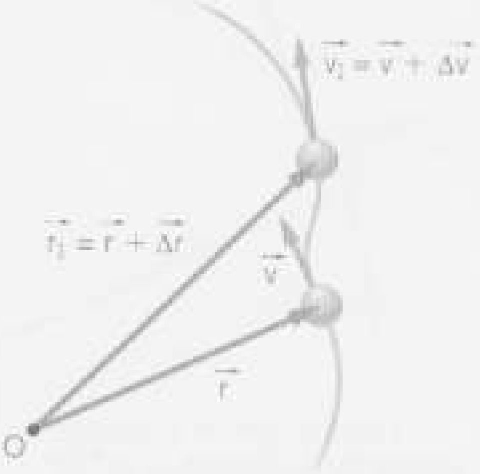


Figura 17 Notazioni utilizzate nella dimostrazione (Δt grande).

Dimostrazione della variazione del momento angolare

Dimostriamo la formula **(18)** nel caso di una particella puntiforme di massa m, che si muove sotto l'effetto di una forza $\vec{F}$; fissiamo un punto O (che è anche l'origine delle posizioni), rispetto al quale calcoliamo i momenti.

A un certo istante t la posizione del punto materiale (rispetto a O) è data dal vettore $\vec{r}$ e la sua velocità è $\vec{v}$. Dopo un intervallo di tempo Δt infinitamente piccolo, la nuova posizione del punto materiale è descritta dal vettore $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ e la sua nuova velocità è $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$ (figura 17).

Dalla cinematica sappiamo le due quantità $\Delta\vec{r}$ e $\Delta\vec{v}$ sono date dalle formule

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t \quad e \quad \Delta\vec{v} = \vec{a}\Delta t. \tag{19}$$

Visto che Δt è infinitamente piccolo, anche $\Delta\vec{r}$ e $\Delta\vec{v}$ hanno la stessa proprietà. Vediamo quanto vale $\Delta\vec{L}$:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{L} &= \vec{L}_1 - \vec{L} = m\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 - m\vec{r} \times \vec{v} = \\ &= m[(\vec{r} + \Delta\vec{r}) \times (\vec{v} + \Delta\vec{v}) - \vec{r} \times \vec{v}] = \\ &= m(\vec{r} \times \vec{v} + \Delta\vec{r} \times \vec{v} + \vec{r} \times \Delta\vec{v} + \Delta\vec{r} \times \Delta\vec{v} - \vec{r} \times \vec{v}) = \\ &= m(\Delta\vec{r} \times \vec{v} + \vec{r} \times \Delta\vec{v}).\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo tralasciato il termine $\Delta\vec{r} \times \Delta\vec{v}$, che è trascurabile visto che è il prodotto di due quantità molto piccole.

Ora sostituiamo le formule **(19)** nell'ultima espressione trovata e otteniamo:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{L} &= m(\Delta t\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}\Delta t) = \vec{r} \times (m\vec{a})\Delta t = \\ &= (\vec{r} \times \vec{F})\Delta t = \vec{M}\Delta t\end{aligned}$$

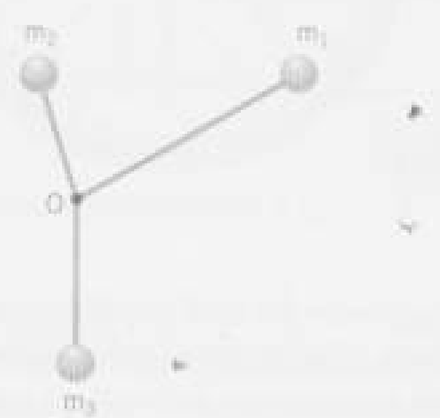
che è proprio la formula **(18)** nel caso di una particella singola.

Prodotto nullo
Ricorda che il prodotto vettoriale tra due vettori paralleli è nullo, quindi lo è anche quello tra due vettori $\vec{v}$ uguali.

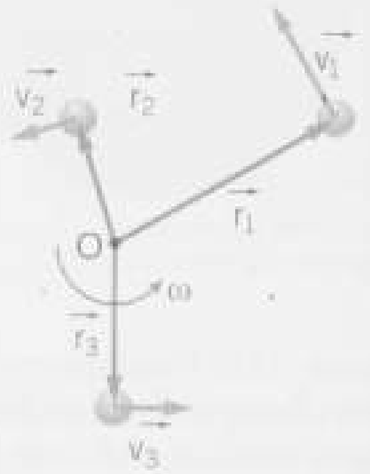
10 IL MOMENTO D'INERZIA

Vogliamo ora calcolare il momento angolare di un corpo rigido. Iniziamo a studiare un caso particolare, cioè:

- un corpo rigido molto semplice, composto da tre particelle di masse m_1, m_2 e m_3 collegate rigidamente al centro di rotazione O mediante tre sbarrette di massa trascurabile.
- Le lunghezze delle aste sono r_1, r_2, r_3 e indichiamo con $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ i vettori velocità delle tre particelle. Il corpo rigido ruota attorno a O con velocità angolare ω.



A



B

IN LABORATORIO

Momento di inerzia e accelerazione angolare
- Video (2 minuti)
- Test (3 domande)

Il momento angolare totale $\vec{L}$ del corpo rigido rispetto a O è la somma dei momenti delle tre particelle:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3.$$

Questi hanno tutti la stessa direzione (perpendicolare al foglio del libro) e lo stesso verso (uscente dal foglio). Quindi il modulo è semplicemente la somma dei tre moduli:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2 + m_3 v_3 r_3.$$

Angolo retto
Ricorda che il modulo dei singoli momenti angolari è semplicemente uguale al prodotto del valore di r per il corrispondente valore di p perché i vettori $\vec{r}$ sono perpendicolari ai rispettivi vettori $\vec{p} = m\vec{v}$.

Semplifichiamo questa espressione usando la velocità angolare ω e scrivendo, per esempio, $v_1 = \omega r_1$; allora il primo addendo diventa $m_1 v_1 r_1 = m_1(\omega r_1) r_1 = m_1 r_1^2 \omega$. Ripetendo la stessa operazione per v_2 e v_3 otteniamo

$$L = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + m_3 r_3^2 = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2)\omega.$$

La quantità che compare tra parentesi nell'ultima espressione viene chiamata **momento d'inerzia** I del corpo rigido. In questo modo il modulo del momento angolare può essere scritto come

$$L = I\omega. \qquad \textbf{(20)}$$

Analogia formale
La formula (20), valida per la rotazione di un corpo rigido, è analoga alla formula $p = mv$, che riguarda il moto traslatorio di un punto materiale. L'analogia si ottiene scambiando contemporaneamente p con L, m con I e v con ω.

Dalla definizione, l'unità di misura del momento d'inerzia è (kg · m²).

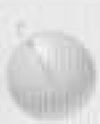
Il momento d'inerzia di un corpo rigido formato da n masse puntiformi è definito come

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 + ... + m_n r_n^2. \qquad \textbf{(21)}$$

In generale, per calcolare il momento d'inerzia di un solido è necessario fare crescere n all'infinito; in questo caso le masse m_1, m_2 ... diventano infinitamente piccole. Inoltre, quando il corpo rigido è tridimensionale (e non planare come quello formato da tre sole masse) i valori r_1, r_2 ... sono le distanze delle singole masse dall'asse di rotazione.

La tabella seguente mostra i valori dei momenti d'inerzia calcolati, sulla base della definizione (21), per diversi corpi rigidi di forma comune.

Momenti di inerzia di alcuni corpi rigidi

	Guscio cilindrico, rispetto all'asse $I = mr^2$	Guscio cilindrico, rispetto a un diametro passante per il centro $I = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$	
	Cilindro pieno, rispetto all'asse $I = \frac{1}{2}mr^2$	Cilindro pieno, rispetto a un diametro passante per il centro $I = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$	
	Sfera piena, rispetto a un diametro $I = \frac{2}{5}mr^2$	Asta sottile, rispetto a una retta perpendicolare passante per il suo centro $I = \frac{1}{12}ml^2$	

ESEMPIO

Un cilindro pieno ha una massa $m = 1{,}3$ kg e un raggio $r = 5{,}4$ cm.

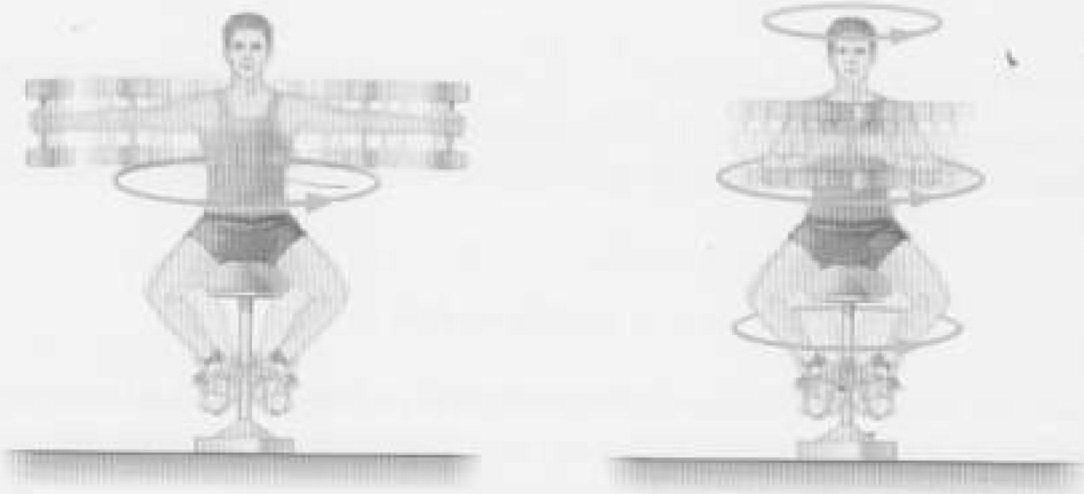
▶ Calcola il momento d'inerzia I_c del cilindro, rispetto al suo asse di simmetria.

Il raggio del cilindro è $r = 5{,}4 \text{ cm} = 0{,}054$ m. Dalla tabella precedente possiamo allora calcolare il valore di I_c come:

$$I_c = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\times(1{,}3 \text{ kg})\times(0{,}054 \text{ m})^2 = 1{,}9\times10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

A parità di massa totale il momento d'inerzia aumenta al crescere delle dimensioni del corpo e diminuisce se esso diventa più piccolo.

Un ragazzo che regge due manubri da palestra con le braccia aperte siede su uno sgabello che può girare attorno a un asse e ruota con una certa velocità angolare. Se stringe le braccia, il suo momento angolare $I\omega$ si conserva (se gli attriti sono trascurabili). Visto che I diminuisce, la velocità angolare ω aumenta.



In questo esempio, il momento angolare si conserva perché il momento totale delle forze esterne rispetto a qualsiasi punto è nullo. In assenza di attriti, una volta messo in rotazione lo sgabello le uniche forze esterne che agiscono sul ragazzo sono la sua forza-peso e la reazione vincolare dello sgabello, che si annullano.

Questo fenomeno è molto sfruttato negli sport: i pattinatori aumentano la propria velocità di rotazione attorno a un asse verticale avvicinando le braccia al corpo. I tuffatori riescono a ruotare velocemente attorno a un asse orizzontale raggruppando il corpo il più possibile.

L'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione

L'introduzione del momento d'inerzia permette di esprimere in maniera semplice l'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione.

Torniamo di nuovo al corpo rigido composto di tre particelle: se esso ruota con velocità angolare, la sua energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2 = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 \omega^2 + m_2 r_2^2 \omega^2 + m_3 r_3^2 \omega^2) =$$
$$= \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2)\,\omega^2 .$$

Nell'ultimo passaggio, la quantità che si trova tra parentesi è il momento d'inerzia del corpo rigido. Il calcolo può essere ripetuto nella stessa maniera qualunque sia il numero di punti che formano il corpo, ottenendo sempre il risultato

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 . \qquad (22)$$

Traslazione e rotazione
La formula (22) per l'energia cinetica di rotazione ha la stessa forma matematica dell'energia cinetica di traslazione

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

se si scambia, come visto in precedenza, m con I e v con ω.

La dinamica rotazionale di un corpo rigido

Consideriamo un corpo rigido che ruota attorno a un asse con velocità angolare ω e che, quindi, ha un momento angolare $L = I\omega$. Esso viene poi accelerato fino alla velocità angolare ω_1, per cui il suo momento angolare diventa $L_1 = I\omega_1$. La variazione ΔL del momento angolare del corpo vale:

$$\Delta L = L_1 - L = I\omega_1 - I\omega = I(\omega_1 - \omega) = I\Delta\omega .$$

APPROFONDIMENTO
Giro della morte per un corpo che rotola (2 pagine)

Dalla formula (**18**) possiamo allora scrivere:

$$\Delta L = I\Delta\omega = M\Delta t .$$

Dividendo per Δt gli ultimi due termini della formula precedente otteniamo, infine:

$$M = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t} . \qquad (23)$$

Il rapporto $\Delta\omega/\Delta t$ esprime la rapidità con cui varia la velocità angolare del corpo ed è chiamato **accelerazione angolare** α:

variazione della velocità angolare (rad/s)

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (24)$$

accelerazione angolare (rad/s²)

intervallo di tempo (s)

Avendo introdotto questa grandezza, la formula (**23**) può essere riscritta come

$$M = I\alpha . \qquad (25)$$

Questa formula, che descrive la rotazione di un corpo rigido, è analoga dalla legge $F = ma$ che vale per un moto di traslazione.