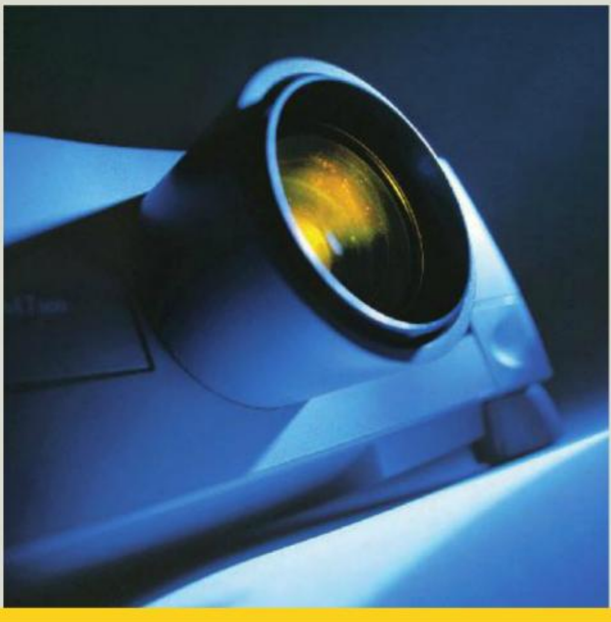
CAPITOLO

12

Le equazioni di secondo grado



Home Cinema

I proiettori si usano comunemente nelle sale cinematografiche, ma, da quando la tecnologia lo permette, molte persone scelgono di godersi la visione dei film nella propria casa, disponendo di un apparecchio ottico per la proiezione e di uno schermo bianco…

…a quale distanza deve essere posto il proiettore affinché l'immagine che appare sullo schermo abbia la dimensione desiderata?

La risposta a pag. 885

1. Che cosa sono le equazioni di secondo grado

Le equazioni di secondo grado

Un'equazione è di secondo grado se, dopo aver applicato i princìpi di equivalenza già studiati per le equazioni di primo grado, si può scrivere nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{con } a \neq 0.$$

Le lettere a, b e c rappresentano numeri reali o espressioni letterali e si chiamano **primo**, **secondo** e **terzo coefficiente** dell'equazione; c è anche detto **termine noto**.

La forma $ax^2 + bx + c = 0$ è detta **forma normale**.

ESEMPIO L'equazione

$$5x^2 - 2x - 1 = 0$$

è di secondo grado in forma normale, e i tre coefficienti sono:

$$a = 5; \quad b = -2; \quad c = -1.$$

-1 è il termine noto.

Se, oltre ad $a \neq 0$, si hanno anche $b \neq 0$ e $c \neq 0$, l'equazione si dice **completa**. Per esempio, l'equazione $2x^2 - 5x + 6 = 0$ è completa.

Se invece l'equazione è **incompleta**, abbiamo i seguenti casi particolari.

EQUAZIONI INCOMPLETE

COEFFICIENTI	FORMA NORMALE	NOME	ESEMPIO
$b \neq 0, c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	equazione **spuria**	$2x^2 - 5x = 0$
$b = 0, c \neq 0$	$ax^2 + c = 0$	equazione **pura**	$2x^2 + 6 = 0$
$b = 0, c = 0$	$ax^2 = 0$	equazione **monomia**	$2x^2 = 0$

Una **soluzione** (o **radice**) dell'equazione è un valore che, sostituito all'incognita, rende vera l'uguaglianza fra i due membri.

ESEMPIO

L'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$ ha per soluzioni i numeri 2 e 3.

Infatti, sostituendo a x il numero 2, si ottiene

$$(2)^2 - 5(2) + 6 = 0$$

e sostituendo il numero 3,

$$(3)^2 - 5(3) + 6 = 0.$$

Risolvere un'equazione di secondo grado significa cercarne le soluzioni. In genere, cercheremo le soluzioni nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Come vedremo, le soluzioni di un'equazione di secondo grado possono essere al massimo due.

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Babilonia, anno 1000 a.C.

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Humbaba e Gamesh, studenti della Casa delle Tavolette, chiedono all'amico Nabu spiegazioni sul problema che avevano come compito a casa: moltiplicando un numero per se stesso e aggiungendo il doppio del numero, si ottiene 24; qual è il numero?
Nabu non ha dubbi: «Il numero è 4. Aggiungete la metà di 2 a 24, cioè 25. Prendete la radice quadrata, cioè 5, e poi...».

(Liberamente tratto da Ian Stewart, *L'eleganza della verità*, Einaudi, Torino, 2008)

CRISTINA: «Come ha fatto Nabu a trovare subito il numero?».

LUCA: «A me il quadrato di un numero e il suo doppio ricordano il quadrato di un binomio».

▶ Scrivi l'equazione relativa al problema. Cerca di risolverla trasformando uno dei due membri nel quadrato di un binomio.

Le soluzioni sono:

$$x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{3}{2}$$

Le soluzioni dell'equazione sono:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

L'espressione $\boldsymbol{x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

viene detta **formula risolutiva** dell'equazione di secondo grado.

ESEMPIO Calcoliamo le radici dell'equazione:

$$4x^2 - 7x - 2 = 0.$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{8} = \begin{cases} \dfrac{7+9}{8} = 2 \\ \dfrac{7-9}{8} = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Le radici dell'equazione sono $x_1 = 2$ e $x_2 = -\frac{1}{4}$.

$a = 4$,
$b = -7$,
$c = -2$.

Il discriminante e le soluzioni

Chiamiamo **discriminante**, e indichiamo con la lettera greca Δ (delta), l'espressione che nella formula risolutiva è sotto radice, cioè:

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac.}$$

Per sapere se esistono soluzioni reali di un'equazione di secondo grado è sufficiente calcolare il discriminante: se è negativo, non esistono soluzioni reali.

Discriminante deriva dal latino *discrimen*, che significa «ciò che serve a distinguere». Con il discriminante possiamo distinguere se le soluzioni reali di un'equazione di secondo grado sono due, una o nessuna.

ESEMPIO

$$x^2 - 3x + 5 = 0 \qquad (a = 1, \quad b = -3, \quad c = 5);$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(5) = 9 - 20 = -11.$$

Poiché $\Delta < 0$, non esistono soluzioni reali.

In generale, risolvendo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, possono presentarsi tre casi, che dipendono dal valore del discriminante:

1. $\boldsymbol{\Delta > 0}$: l'equazione ha **due soluzioni reali e distinte**:
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
2. $\boldsymbol{\Delta = 0}$: l'equazione ha **due soluzioni reali coincidenti**:
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$
3. $\boldsymbol{\Delta < 0}$: l'equazione **non ha soluzioni reali**, cioè in $\mathbb{R}$ è impossibile.

Se $\Delta = 0$:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}.$$

Si dice anche che la soluzione è **doppia**.

2. Risolviamo l'equazione $3x^2 + 27 = 0$.

$$3x^2 + 27 = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 = -27 \quad \rightarrow \quad x^2 = -9.$$

Poiché nessun numero reale ha quadrato negativo, l'equazione non ha soluzioni reali.

In generale, un'equazione di secondo grado **pura**, del tipo $ax^2 + c = 0$, con a e c numeri reali discordi, ha due soluzioni reali e opposte:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}; \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Se a e c sono concordi, l'equazione non ha soluzioni reali.

Le equazioni spurie: $ax^2 + bx = 0$

ESEMPIO Risolviamo l'equazione $6x^2 - 5x = 0$.

Raccogliamo x: $x(6x - 5) = 0$.

Per la legge di annullamento del prodotto:

$$x = 0 \quad \text{oppure} \quad 6x - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{5}{6}.$$

L'equazione ha due soluzioni: $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{5}{6}$.

In generale, un'equazione di secondo grado **spuria**, del tipo $ax^2 + bx = 0$, ha sempre due soluzioni reali di cui una è nulla:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Le equazioni monomie: $ax^2 = 0$

ESEMPIO Risolviamo l'equazione $2x^2 = 0$.

$$2x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2 = 0.$$

In generale, un'equazione di secondo grado **monomia**, del tipo $ax^2 = 0$, ha sempre due soluzioni reali coincidenti: $x_1 = x_2 = 0$.

Negli esercizi affronteremo problemi risolvibili con equazioni di secondo grado, ossia **problemi di secondo grado**.

Nel sito: ▶ teoria e 53 esercizi su I numeri complessi e le equazioni di secondo grado