c) $\sqrt{a^3b}$ non è equivalente a $\sqrt[4]{a^9b^2}$.
Infatti, se si moltiplicano per 2 l'esponente del radicando e l'indice, si ottiene:

$$\sqrt{a^3b} = \sqrt[2\cdot 2]{(a^3b)^{1\cdot 2}} = \sqrt[4]{(a^3b)^2} = \sqrt[4]{a^6b^2}$$

e non $\sqrt[4]{a^9b^2}$.

d) $\sqrt[3]{a-b}$ è equivalente a $\sqrt[6]{a^2-2ab+b^2}$.
Infatti, moltiplicando per 2 indice ed esponente, otteniamo:

$$\sqrt[3]{a-b} = \sqrt[3\cdot 2]{(a-b)^{1\cdot 2}} = \sqrt[6]{(a-b)^2} =$$
$$= \sqrt[6]{a^2-2ab+b^2}.$$

Fra le seguenti coppie di radicali indica quali sono quelle equivalenti, applicando la proprietà invariantiva. Supponi che siano verificate le condizioni di esistenza dei radicali.

76 $\sqrt[4]{3^2}, \sqrt[12]{3^6}$; $\sqrt{4\cdot 5^3}, \sqrt[4]{2^4\cdot 5^6}$; $\sqrt[3]{\dfrac{27}{10}}, \sqrt[6]{\dfrac{3^9}{10^2}}$.

77 $\sqrt{8}, \sqrt[12]{2^{18}}$; $\sqrt[3]{25}, \sqrt[9]{5^6}$; $\sqrt[3]{81}, \sqrt[12]{3^8}$.

78 $\sqrt{x+1}, \sqrt[4]{x^2+2x+1}$; $\sqrt{1-x}, \sqrt[6]{1-x^3}$.

79 $\sqrt[3]{2ab}, \sqrt[6]{4a^2b^2}$; $\sqrt[5]{32a^5b}, \sqrt[10]{64a^{10}b^2}$; $\sqrt[3]{2ac}, \sqrt[6]{6a^3c^3}$.

80 $\sqrt{2a^3b}, \sqrt[4]{8a^3b}$; $\sqrt{2ab^2}, \sqrt[6]{8a^3b^6}$; $\sqrt{ab^2c}, \sqrt[5]{a^4b^6c^4}$.

81 $\sqrt[3]{abc^2}, \sqrt[4]{a^2b^2c^3}$; $\sqrt{3ab^2}, \sqrt[6]{27a^3b^6}$; $\sqrt{2ab^3}, \sqrt[4]{8a^2b^6}$.

82 $\sqrt{3a^2b}, \sqrt[6]{9a^6b^3}$; $\sqrt{2abc}, \sqrt[3]{6a^3b^3c^3}$; $\sqrt{abc^3}, \sqrt[6]{3a^3b^3c^6}$.

83 $\sqrt{a-1}, \sqrt[10]{a^{10}-1}$; $\sqrt{\dfrac{9}{2}(2a-5)}, \sqrt[6]{\dfrac{27}{8}(2a-5)^3}$.

ESERCIZIO GUIDA

84 Applicando la proprietà invariantiva, determiniamo il radicale equivalente a quello dato, indicando anche le condizioni di esistenza dei radicali.

$$\sqrt[4]{2a^5b} = \sqrt[12]{\ldots\ldots}.$$

La proprietà invariantiva dice che $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n\cdot p]{x^{m\cdot p}}$, con $x^m \geq 0$, $n, p \in \mathbb{N} - \{0\}$. Dobbiamo risolvere un problema del tipo $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n\cdot p]{\ldots\ldots}$, dove $n = 4$ e $n \cdot p = 12$, ossia $4p = 12$, da cui $p = 12 : 4 = 3$. Pertanto:

$$\sqrt[4]{2a^5b} = \sqrt[12]{(2a^5b)^{\underbrace{12:4}_{\text{quoziente degli indici}}}} = \sqrt[12]{(2a^5b)^3} = \sqrt[12]{8a^{15}b^3}.$$

Per l'esistenza dei radicali basta porre: $ab \geq 0$.
Infatti, se $ab \geq 0$, è anche: $a^5b = a^4(ab) \geq 0$ e $a^{15}b^3 = a^{14}b^2(ab) \geq 0$.

COMPLETA applicando la proprietà invariantiva e determina il radicale equivalente. Scrivi anche le condizioni di esistenza dei radicali.

85 $\sqrt{8} = \sqrt[6]{\ldots\ldots}$; $\sqrt[5]{2^7} = \sqrt[15]{\ldots\ldots}$; $\sqrt{2^4\cdot 3^3} = \sqrt[12]{\ldots\ldots}$; $\sqrt[3]{a^4b} = \sqrt[6]{\ldots\ldots}$.

86 $\sqrt{3a^3} = \sqrt[4]{\ldots\ldots}$; $\sqrt{2b^4} = \sqrt[6]{\ldots\ldots}$; $\sqrt{a+1} = \sqrt[4]{\ldots\ldots}$; $\sqrt{2ab^2} = \sqrt[4]{\ldots\ldots}$.

87 $3ab^2 = \sqrt[3]{.....}$; $\sqrt{2ab^3} = \sqrt[6]{.....}$; $\sqrt[5]{3ac} = \sqrt[10]{.....}$; $\sqrt{\frac{a^6b^3}{4}} = \sqrt[4]{.....}$.

88 $\sqrt[4]{\frac{2a^2b^2}{c^4}} = \sqrt[12]{.....}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{a^7}} = \sqrt[6]{.....}$; $\sqrt{\frac{3a}{b^2}} = \sqrt[6]{.....}$; $\sqrt{\frac{1}{2}a} = \sqrt[12]{.....}$.

L'indice o l'esponente sono letterali

ESERCIZIO GUIDA

89 Applicando la proprietà invariantiva, determiniamo il radicale equivalente:

$\sqrt[n]{a^2} = \sqrt[3n^2]{.....}$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Come nel caso in cui l'indice e l'esponente sono numeri, dobbiamo eseguire la divisione fra gli indici:

$3n^2 : n = 3n^{2-1} = 3n$.

Dobbiamo moltiplicare per $3n$ l'esponente del radicando:

$2 \cdot 3n = 6n$.

Quindi il radicale equivalente è: $\sqrt[n]{a^2} = \sqrt[3n^2]{a^{6n}}$.

Determina il radicale equivalente (gli indici appartengono a $\mathbb{N} - \{0\}$).

90 $\sqrt{a^mb^2} = \sqrt[6]{.....}$; $\sqrt{a^{m-2}b^n} = \sqrt[4]{.....}$; $\sqrt{abc^2} = \sqrt[2n]{.....}$.

91 $\sqrt{a^mb^2} = \sqrt[2n]{.....}$; $\sqrt{a^kb} = \sqrt[4k]{.....}$; $\sqrt[3]{ab^n} = \sqrt[6n]{.....}$.

92 $\sqrt[5]{a^nb} = \sqrt[10n]{.....}$; $\sqrt[n]{ab^2} = \sqrt[n^2]{.....}$; $\sqrt[3]{ab^k} = \sqrt[3k^2]{.....}$.

La semplificazione di radicali

ESERCIZIO GUIDA

93 Semplifichiamo i radicali: a) $\sqrt[9]{64}$; b) $\sqrt[6]{27x^3y^6}$ (con $x \geq 0$).

a) Scriviamo il radicando come potenza: $64 = 2^6$; dividiamo poi per 3 (che è il M.C.D. tra 9 e 6) l'indice di radice e l'esponente del radicando:

$$\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}.$$

b) Scriviamo il radicando come una potenza; l'esponente del radicando è 3, quindi dividiamo per 3 l'indice di radice e l'esponente del radicando:

$$\sqrt[6]{27x^3y^6} = \sqrt[6]{3^3x^3y^6} = \sqrt[6]{(3xy^2)^3} = \sqrt{3xy^2}.$$

94 **VERO O FALSO?**

a) $\sqrt[9]{27} = \sqrt[3]{3}$ V F

b) $\sqrt[3]{a^3 + b^3} = a + b$ V F

c) $\sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2}$ V F

d) $\sqrt[6]{a^8b^4} = \sqrt[3]{a^4b^2}$ V F

e) $\sqrt[8]{3^4 + 5^4} = \sqrt{3+5}$ V F

f) $\sqrt[8]{16} = \sqrt[4]{8}$ V F

Indica quali dei seguenti radicali non si possono semplificare.

95 $\sqrt[3]{32}$; $\sqrt[7]{28}$; $\sqrt[5]{a^{10}y^2}$; $\sqrt[4]{225}$; $\sqrt[9]{216}$.

96 $\sqrt{\dfrac{a^4}{a^2+b^2}}$; $\sqrt[3]{9a^3}$; $\sqrt[6]{x^2+y^2}$; $\sqrt[4]{4(x+y)^2}$; $\sqrt[8]{\dfrac{64}{a^2+2a+1}}$.

Semplifica, se possibile, i seguenti radicali, supponendo non negativi i radicandi e i fattori letterali che eventualmente compaiono (anche nei risultati).

97 $\sqrt[10]{32}$; $\sqrt[4]{9}$; $\sqrt[6]{25}$; $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[10]{16}$; $\sqrt[6]{125}$; $\sqrt[8]{2^{12}}$.

98 $\sqrt[8]{\dfrac{1}{8}}$; $\sqrt[6]{\dfrac{25}{64}}$; $\sqrt[6]{\dfrac{2^3}{27}}$; $\sqrt[6]{1000}$; $\sqrt[4]{\dfrac{36\cdot 7^2}{5^4}}$; $\sqrt[8]{\dfrac{1}{64}}$; $\sqrt[6]{4^2+3^2}$; $\sqrt[4]{13^2-5^2}$.

99 $\sqrt[6]{27a^3b^6}$; $\sqrt[10]{32a^5b^5}$.

100 $\sqrt{a^4b^6}$; $\sqrt{a^2b^4}$; $\sqrt[3]{a^6b^9}$.

101 $\sqrt[6]{a^2(a^2-4a+4)}$

102 $\sqrt[9]{a^3+8+6a^2+12a}$

103 $\sqrt[6]{4a^2b^{12}}$; $\sqrt[10]{4a^4b^2}$.

104 $\sqrt[6]{\dfrac{1}{9}+a^2+\dfrac{2}{3}a}$

105 $\sqrt[4]{\dfrac{4(2b+1)^2}{25}}$

106 $\sqrt[6]{\dfrac{(a-1)^2}{b^2+2b+1}}$

107 $\sqrt[6]{\dfrac{4a^2}{c^4}}$; $\sqrt[10]{\dfrac{4a^2b^2}{c^6}}$.

108 $\sqrt[4]{\dfrac{x^3-2x^2}{16x-32}}$

109 $\sqrt[6]{\dfrac{x^2+2x+1}{a^2+4a+4}}$

110 $\sqrt[9]{\dfrac{8a^6}{a^3+3a^2+3a+1}}$

111 $\sqrt{x^2+\dfrac{a^4}{x^2}+2a^2}$

112 $\sqrt[6]{\dfrac{a-1}{(a^2-1)(a+1)^3}}$

La semplificazione dei radicali con la discussione sul segno dei radicandi

ESERCIZIO GUIDA

113 Semplifichiamo i radicali:

a) $\sqrt[4]{(-5)^6}$; b) $\sqrt[6]{x^2y^4}$; c) $\sqrt{x^2-4x+4}$; d) $\sqrt[8]{\dfrac{x^2+14x+49}{1-6x+9x^2}}$.

a) $\sqrt[4]{(-5)^6}=\sqrt[4:2]{(-5)^{6:2}}=$

Poiché $(-5)^{6:2}=(-5)^3$ è negativo, dovendo essere il radicando sempre positivo, occorre introdurre il valore assoluto:

$=\sqrt{|-5|^3}=\sqrt{125}.$

b) C.E.: $\forall\, x\in\mathbb{R}, \forall\, y\in\mathbb{R}$. Infatti il radicando è positivo o nullo per qualsiasi valore attribuito a x o a y.

$\sqrt[6]{x^2y^4}=\sqrt[\cancel{6}\,3]{(xy^2)^{\cancel{2}\,1}}=\sqrt[3]{|x|y^2}.$

Per avere il radicando non negativo, dopo la semplificazione occorre introdurre il valore assoluto di x.

c) $\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=$ C.E.: $\forall\, x\in\mathbb{R}$, perché l'esponente del radicando è pari.

$=|x-2|$, perché un radicale deve essere non negativo.

d) $\sqrt[8]{\dfrac{x^2+14x+49}{1-6x+9x^2}}=\sqrt[8]{\dfrac{(x+7)^2}{(1-3x)^2}}=\sqrt[8]{\left(\dfrac{x+7}{1-3x}\right)^2}=$

Affinché la frazione algebrica esista, deve essere $1-3x\neq 0$, ossia $x\neq\dfrac{1}{3}$: C.E.: $\forall\, x\neq\dfrac{1}{3}$.

Poiché l'esponente del radicando è pari, il radicale esiste:

$=\sqrt[4]{\left|\dfrac{x+7}{1-3x}\right|}$.

Abbiamo dovuto introdurre il valore assoluto perché ci sono valori di x, ammessi dalle C.E., che rendono il radicando negativo (per esempio, $x=-8$).

114 **VERO O FALSO?**

a) $\sqrt{(-9)^2}=9$ V F

b) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1-\sqrt{3}}$ V F

c) $\sqrt[6]{a^3}=\sqrt{a}$ V F

d) $\sqrt[4]{(2x-3)^2}=\sqrt{2x-3}$ V F

e) $\sqrt[12]{(-27)^6}=\sqrt{-27}$ V F

f) $\sqrt[n]{a^n}=a,\ \forall\, a\in\mathbb{R}$ e $\forall\, n\in\mathbb{N}$. V F

Semplifica, se è possibile, i seguenti radicali dopo aver indicato le condizioni di esistenza.

115 $\sqrt[9]{0{,}027}$; $\sqrt[6]{(-2)^4}$; $\sqrt[8]{36}$. $\left[\sqrt[3]{\dfrac{3}{10}};\sqrt[3]{4};\sqrt[4]{6}\right]$

116 $\sqrt[9]{27x^3}$; $\sqrt[8]{\dfrac{4a^2}{x^4}}$. $\left[x\geq 0,\sqrt[3]{3x}; x\neq 0,\sqrt[4]{\dfrac{2|a|}{x^2}}\right]$

117 $\sqrt[6]{a^3b^6}$; $\sqrt[10]{64x^4y^{10}}$. $[a\geq 0,\sqrt{ab^2};\sqrt[5]{8x^2|y|^5}]$

118 $\sqrt[4]{16(a-1)^2}$; $\sqrt[6]{a^2(a+3)^4}$. $[\sqrt{4|a-1|};\sqrt[3]{|a|(a+3)^2}]$

119 $\sqrt[6]{\dfrac{8a^3}{b^6}}$; $\sqrt{x^2-6x+9}$. $\left[a>0, b\neq 0,\sqrt{\dfrac{2a}{b^2}};|x-3|\right]$

120 $\sqrt{\dfrac{4}{9}a^6}$; $\sqrt{\dfrac{1}{64}a^8b^{10}}$. $\left[\dfrac{2}{3}|a|^3;\ \dfrac{1}{8}a^4|b|^5\right]$

121 $\sqrt{a^4-8a^2+16}$; $\sqrt{4a^2x^2}$. $[|a^2-4|;2|ax|]$

122 $\sqrt{\dfrac{9a^6}{b^4}}$; $\sqrt[9]{\dfrac{216a^3b^6}{y^6}}$. $\left[\dfrac{3|a|^3}{b^2}, b\neq 0; a\geq 0, y\neq 0,\sqrt[3]{\dfrac{6ab^2}{y^2}}\right]$

123 $\sqrt[4]{a^4b^6}$; $\sqrt[8]{a^2-2a+1}$. $[\sqrt{a^2|b|^3};\sqrt[4]{|a-1|}]$

124 $\sqrt[4]{\dfrac{4x^2+4y^2}{a^4}}$; $\sqrt[8]{\dfrac{a^4(a-4)^4}{a^2+4a+4}}$. $\left[a\neq 0,\text{ non semplif.}; a\neq -2,\sqrt[4]{\dfrac{a^2(a-4)^2}{|a+2|}}\right]$

BRAVI SI DIVENTA ► E34

125 $\sqrt[12]{\dfrac{24(x^8+4x^6+4x^4)}{54b^6(a^2+6a+9)}}$

126 $\sqrt[6]{\dfrac{x^2+2x+1}{4x^2+4x+1}}$; $\sqrt[6]{\dfrac{27a^6}{x^3+3x^2+3x+1}}$. $\left[x \neq -\dfrac{1}{2}, \sqrt[3]{\left|\dfrac{x+1}{2x+1}\right|}; x > -1, \sqrt{\dfrac{3a^2}{x+1}}\right]$

127 $\sqrt[10]{\dfrac{32(a-1)^{10}}{(a+1)^5}}$; $\sqrt[4]{\dfrac{4(x^2-2x+1)(x-1)}{(x^2-1)(x+1)}}$. $\left[a > -1, \sqrt{\dfrac{2(a-1)^2}{a+1}}; x \neq \pm 1, \sqrt{\left|\dfrac{2(x-1)}{x+1}\right|}\right]$

128 $\sqrt[6]{\dfrac{4(x^2+1-2x)x^2}{9(x+1)^2}}$; $\sqrt[8]{1-\dfrac{2ab-1}{a^2b^2}}$. $\left[x \neq -1, \sqrt[3]{\left|\dfrac{2x(x-1)}{3(x+1)}\right|}; a \neq 0, b \neq 0, \sqrt[4]{\dfrac{|ab-1|}{|ab|}}\right]$

129 Determina per quali valori di x sono soddisfatte le seguenti equazioni:

a) $\sqrt{4x^2} = 2x$; b) $\sqrt{x^2-10x+25} = 5-x$. [a) $x \geq 0$; b) $x \leq 5$]

L'indice o l'esponente sono letterali

ESERCIZIO GUIDA

130 Semplifichiamo i seguenti radicali:

a) $\sqrt[4]{a^8b^{2n}}$; b) $\sqrt[3n]{\dfrac{x^na^{9n}}{b^{2n}}}$, $x \cdot a > 0$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

a) $\sqrt[4]{a^8b^{2n}} = \sqrt[4]{(a^4b^n)^2} =$

→ se n è pari, b^n è sempre positivo o nullo: $= \sqrt{a^4b^n}$.

→ se n è dispari, b^n è negativo quando b è negativo, perciò dobbiamo introdurre il valore assoluto: $= \sqrt{a^4|b|^n}$.

b) $\sqrt[3n]{\dfrac{x^na^{9n}}{b^{2n}}} = \sqrt[3n]{\left(\dfrac{xa^9}{b^2}\right)^n}$.

Essendo $x \cdot a > 0$ per ipotesi, allora $xa^9 > 0$:

$$\sqrt[3n]{\left(\frac{xa^9}{b^2}\right)^n} = \sqrt[3]{\frac{xa^9}{b^2}}.$$

Semplifica i seguenti radicali (gli indici appartengono a $\mathbb{N} - \{0\}$).

131 $\sqrt[8]{a^{2m}b^4}$ $(a > 0)$ $[\sqrt[4]{a^mb^2}]$

132 $\sqrt[6]{(c+2)^{3m}(a-1)^{3(s+1)}}$ $(c > -2 \wedge a > 1)$ $[\sqrt{(c+2)^m(a-1)^{s+1}}]$

133 $\sqrt[6t]{\dfrac{8(x+1)^3}{(a+2)^{3t}}}$ $\left(a \neq -2, \dfrac{x+1}{(a+2)^t} > 0\right)$ $\left[\sqrt[2t]{\dfrac{2(x+1)}{(a+2)^t}}\right]$

134 $\sqrt[4]{b^{2t+2}a^4}$ [$\sqrt{b^{t+1}a^2}$ se t è dispari; $\sqrt{|b|^{t+1}a^2}$ se t è pari]

135 $\sqrt[2c]{\dfrac{(x+y)^4 16}{a^2+b^2-2ab}}$ $(a \neq b)$ $\left[\sqrt[c]{\dfrac{4(x+y)^2}{|a-b|}}\right]$

136 $\sqrt[6t]{\dfrac{x^t b^{3t}}{a^{2t}}}$ $\left[\sqrt[6]{\dfrac{xb^3}{a^2}}\right.$ se t è dispari; $\left.\sqrt[6]{\dfrac{|x \cdot b^3|}{a^2}} \text{ se } t \text{ è pari}\right]$

La riduzione di radicali allo stesso indice

ESERCIZIO GUIDA

137 Riduciamo allo stesso indice i seguenti radicali, supponendo verificate le C.E.:

a) $\sqrt[4]{2a^2}$, $\sqrt[6]{3ab^3}$, $\sqrt[3]{a^2b^4}$; b) $\sqrt[6]{(a+b)^2}$, $\sqrt{a+b}$, $\sqrt[3]{a+b^2}$.

a) Calcoliamo il minimo indice comune, ossia il m.c.m. fra gli indici: m.c.m.(4, 6, 3) = 12.
Applichiamo la proprietà invariantiva:

$$\sqrt[4]{2a^2} \xrightarrow{\cdot 3} \sqrt[12]{(2a^2)^3} = \sqrt[12]{8a^6};\quad \sqrt[6]{3ab^3} \xrightarrow{\cdot 2} \sqrt[12]{(3ab^3)^2} = \sqrt[12]{9a^2b^6};\quad \sqrt[3]{a^2b^4} \xrightarrow{\cdot 4} \sqrt[12]{(a^2b^4)^4} = \sqrt[12]{a^8b^{16}}.$$

b) Calcoliamo il minimo indice comune:

m.c.m.(6, 2, 3) = 6.

Applichiamo la proprietà invariantiva: l'indice del primo radicale è già 6,

$$\sqrt[2]{a+b} \xrightarrow{\cdot 3} \sqrt[6]{(a+b)^3},$$

$$\sqrt[3]{a+b^2} \xrightarrow{\cdot 2} \sqrt[6]{(a+b^2)^2}.$$

Abbiamo ottenuto tre radicali di indice 6:

$$\sqrt[6]{(a+b)^2},\qquad \sqrt[6]{(a+b)^3},\qquad \sqrt[6]{(a+b^2)^2}.$$

Riduci allo stesso indice i seguenti radicali. (Qui e in seguito, se non vengono date indicazioni diverse, supponi verificate le C.E.)

138 $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{3}$. $[\sqrt[12]{729}; \sqrt[12]{81}; \sqrt[12]{27}]$

139 $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[6]{5}$. $[\sqrt[6]{4}; \sqrt[6]{27}; \sqrt[6]{5}]$

140 $\sqrt[12]{52}$, $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[3]{7}$. $[\sqrt[12]{52}; \sqrt[12]{216}; \sqrt[12]{2401}]$

141 $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt{a}$. $[\sqrt[4]{25}; \sqrt[4]{7}; \sqrt[4]{a^2}]$

142 $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt{2a^2}$. $[\sqrt[12]{a^9}; \sqrt[12]{a^4}; \sqrt[12]{64a^{12}}]$

143 $\sqrt[12]{3x^2y^3}$, $\sqrt[4]{2xy^2}$, $\sqrt[3]{3xy}$. $[\sqrt[12]{3x^2y^3}; \sqrt[12]{8x^3y^6}; \sqrt[12]{81x^4y^4}]$

144 $\sqrt[6]{(a-b)^2}$, $\sqrt{a+b}$, $\sqrt[3]{a+b}$. $[\sqrt[6]{(a-b)^2}; \sqrt[6]{(a+b)^3}; \sqrt[6]{(a+b)^2}]$

145 $\sqrt[15]{25a^3b^4}$, $\sqrt[3]{3ab^2}$, $\sqrt[5]{5a^2b}$. $[\sqrt[15]{25a^3b^4}; \sqrt[15]{243a^5b^{10}}; \sqrt[15]{125a^6b^3}]$

146 $\sqrt{a+2}$, $\sqrt[3]{a^2+4a+4}$, $\sqrt[4]{(a+2)^3}$. $[\sqrt[12]{(a+2)^6}; \sqrt[12]{(a+2)^8}; \sqrt[12]{(a+2)^9}]$

147 $\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{y+1}}$, $\sqrt{\dfrac{a+b}{3}}$, $\sqrt[10]{\dfrac{z-t}{z+t}}$. $\left[\sqrt[10]{\dfrac{(x-1)^2}{(y+1)^2}}; \sqrt[10]{\dfrac{(a+b)^5}{243}}; \sqrt[10]{\dfrac{z-t}{z+t}}\right]$

148 $\sqrt{\frac{(x-y)^3}{2}}$, $\sqrt[3]{(a+b)^4}$, $\sqrt[12]{\frac{a-b}{a+b}}$. $\left[\sqrt[12]{\frac{(x-y)^{18}}{64}}; \sqrt[12]{(a+b)^{16}}; \sqrt[12]{\frac{a-b}{a+b}}\right]$

149 $\sqrt{\frac{2xy}{x+1}}$, $\sqrt[6]{\frac{xz}{2x-1}}$, $\sqrt[4]{\frac{x^3y}{3}}$. $\left[\sqrt[12]{\frac{64x^6y^6}{(x+1)^6}}; \sqrt[12]{\frac{x^2z^2}{(2x-1)^2}}; \sqrt[12]{\frac{x^9y^3}{27}}\right]$

150 $\sqrt[3]{\frac{(2x-1)^t}{3}}$, $\sqrt[6]{\frac{4(x-1)}{2t}}$, $\sqrt{\frac{2x}{3a-1}}$. $\left[\sqrt[6]{\frac{(2x-1)^{2t}}{9}}; \sqrt[6]{\frac{4(x-1)}{2t}}; \sqrt[6]{\frac{8x^3}{(3a-1)^3}}\right]$

Il confronto di radicali

ESERCIZIO GUIDA

151 Confrontiamo i radicali $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{7}$.

Riduciamo allo stesso indice:

$\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$

$\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$

$\sqrt[6]{7} = \sqrt[12]{7^2} = \sqrt[12]{49}$

$27 < 49 < 81$.

Mettiamo i radicali nello stesso ordine dei radicandi:

$\sqrt[4]{3} < \sqrt[6]{7} < \sqrt[3]{3}$.

Confronta i seguenti radicali.

152 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{12}$. $[\sqrt{2} < \sqrt[6]{12} < \sqrt[3]{5}]$

153 $\sqrt{90}$, $\sqrt[5]{80}$, $\sqrt[10]{120}$. $[\sqrt[10]{120} < \sqrt[5]{80} < \sqrt{90}]$

154 $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[6]{4}$. $\left[\sqrt{\frac{2}{3}} < \sqrt[3]{\frac{3}{4}} < \sqrt[6]{4}\right]$

155 $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{5}$. $[\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}]$

Disponi in ordine crescente i seguenti radicali dopo averli ridotti allo stesso indice.

156 $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt{7}$.

157 $\sqrt{8}$, $\sqrt[4]{14}$, $\sqrt[6]{25}$, $\sqrt[3]{28}$.

158 Disponi in ordine crescente i seguenti numeri reali.

$\sqrt[4]{27}$, 2,2, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{18}$.

5. La moltiplicazione e la divisione fra radicali

Teoria a pag. 786

RIFLETTI SULLA TEORIA

159 **VERO O FALSO?**

a) Il prodotto di due radicali è un radicale che ha per indice il prodotto degli indici e per radicando il prodotto dei radicandi. V F

b) $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$, $\forall x \in \mathbb{R}_0^+$ e $\forall y \in \mathbb{R}^+$. V F

c) Il prodotto dei radicali $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[4]{7}$ è il radicale $\sqrt[12]{35}$. V F

160 **VERO O FALSO?**

a) È possibile trasportare fuori dal segno di radice un fattore solo se l'esponente è multiplo dell'indice. V F

b) Il fattore a^{16}, portato fuori dal segno di radice quadrata, diventa a^4. V F

c) I radicali $\sqrt[4]{a^{14}b^3}$ e $|a|^3\sqrt[4]{a^2b^3}$, con $b \in \mathbb{R}_0^+$, sono equivalenti. V F

ESERCIZI

La moltiplicazione fra radicali

ESERCIZIO GUIDA

161 Eseguiamo le seguenti moltiplicazioni fra radicali:

a) $\sqrt[3]{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{25}} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$; b) $\sqrt{\frac{2a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{ab^2}{6}}\ (a \geq 0, b > 0)$.

a) Poiché **gli indici dei radicali sono uguali**, è sufficiente applicare il teorema del prodotto $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{25}} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{2}} = \sqrt[3]{\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{25}} \cdot \frac{\cancel{5}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

b) Poiché **i radicali hanno indici diversi**, li riduciamo allo stesso indice:

$$\sqrt{\frac{2a}{b}} = \sqrt[6]{\frac{8a^3}{b^3}} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{\frac{ab^2}{6}} = \sqrt[6]{\frac{a^2b^4}{36}}.$$

$$\sqrt{\frac{2a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{ab^2}{6}} = \sqrt[6]{\frac{8a^3}{b^3}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^2b^4}{36}} =$$

Il prodotto è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi:

$$= \sqrt[6]{\frac{{}^{2}\cancel{8}a^3}{\cancel{b^3}} \cdot \frac{a^2 \cdot \cancel{b^4}}{\cancel{36}_{9}}} = \sqrt[6]{\frac{2a^5b}{9}}.$$

Esegui le seguenti moltiplicazioni fra radicali e semplifica i risultati. Supponi che siano verificate le C.E.

162 $\sqrt{48} \cdot \sqrt{3}$; $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$; $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$. [12; 3; 8]

163 $\sqrt[5]{12}\,\sqrt[5]{36}\,\sqrt[5]{18}$; $\sqrt[6]{2}\,\sqrt[6]{8}\,\sqrt[6]{32}$. [6; $\sqrt{8}$]

164 $\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[6]{7} \cdot \sqrt[3]{7}$. [3; $\sqrt[4]{7^3}$]

165 $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt{a^3}\,\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[5]{x}\,\sqrt[10]{x^3}\,\sqrt{x}$. [$\sqrt[3]{a^7}$; x]

166 $\sqrt[5]{\frac{6}{5}} \cdot \sqrt[5]{\frac{35}{42}} \cdot \sqrt[5]{2}$; $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{8}{27}} \cdot \sqrt{6}$. $\left[\sqrt[5]{2}; \sqrt{\frac{4}{3}}\right]$

167 $\sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{\frac{8}{30}} \cdot \sqrt{6}$; $\sqrt{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt{\frac{8}{25}} \cdot \sqrt{\frac{3}{12}}$. $\left[\sqrt{2}; \sqrt{\frac{1}{30}}\right]$

168 $\sqrt[6]{\frac{27}{x^4}} \cdot \sqrt[6]{\frac{xy^5}{8}} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{y^2}}$; $\sqrt{\frac{4(a-b)^2}{5a^2}} \cdot \sqrt{\frac{25ab^2}{12(a-b)^4}}$. $\left[\sqrt{\frac{3}{2}\frac{y}{x}}; \sqrt{\frac{5b^2}{3a(a-b)^2}}\right]$

169 $\sqrt{y} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}$; $\sqrt[6]{\frac{8a}{27b^3}} \cdot \sqrt{\frac{3b}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4a}}$. $\left[\sqrt[6]{\frac{x^4y^3}{4}}; \sqrt[6]{\frac{1}{16a}}\right]$

La divisione fra radicali

ESERCIZIO GUIDA

170 Eseguiamo le divisioni fra radicali:

a) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; b) $\sqrt[4]{24ab^2} : \sqrt{2b}$ (con $a \geq 0$ e $b > 0$).

a) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{\frac{1}{2}} =$

Portiamo allo stesso indice:

$= \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} : \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} =$

Applichiamo il teorema del quoziente $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$:

$= \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^4} = \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^{3-4}} =$

$= \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} = \sqrt[12]{2}.$

b) $\sqrt[4]{24ab^2} : \sqrt{2b} = \sqrt[4]{24ab^2} : \sqrt[4]{(2b)^2} =$

$= \sqrt[4]{24ab^2 : 4b^2} = \sqrt[4]{6a}.$

Esegui le seguenti divisioni fra radicali. (Supponi che siano verificate le C.E.)

171 $\sqrt{9} : \sqrt{3}$; $\sqrt{7} : \sqrt{5}$; $\sqrt{8} : \sqrt{\frac{4}{3}}$. $\left[\sqrt{3}; \sqrt{\frac{7}{5}}; \sqrt{6}\right]$

172 $\sqrt{a^2} : \sqrt{a}$; $\sqrt{a} : \sqrt{b}$; $\sqrt{x^3} : \sqrt{\frac{x^2}{y}}$. $\left[\sqrt{a}; \sqrt{\frac{a}{b}}; \sqrt{xy}\right]$

173 $\sqrt[4]{2} : \sqrt[4]{\frac{8}{5}}$; $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} : \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[7]{32} : \sqrt[7]{2^6}$. $\left[\sqrt[4]{\frac{5}{4}}; 1; \sqrt[7]{\frac{1}{2}}\right]$

174 $\sqrt{5} : \sqrt[4]{\frac{25}{81}}$; $\sqrt[3]{2} : \sqrt[12]{\frac{8}{9}}$; $\sqrt{1+\frac{3}{5}} : \sqrt{\frac{4}{5}}$. $[3; \sqrt[12]{18}; \sqrt{2}]$

175 $\sqrt{x} : \sqrt[4]{\frac{x^5}{y^4}}$; $\sqrt[3]{a} : \sqrt[12]{\frac{a^3}{b^2}}$; $\sqrt{4} : \sqrt[4]{8}$. $\left[\sqrt[4]{\frac{y^4}{x^3}}; \sqrt[12]{ab^2}; \sqrt[4]{2}\right]$

Espressioni con moltiplicazioni e divisioni

Semplifica le seguenti espressioni contenenti moltiplicazioni e divisioni fra radicali. Supponi i radicandi non negativi.

176 $\sqrt{125} : \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{6}$ $[30]$

177 $(\sqrt{8} \cdot \sqrt{48}) : (\sqrt{24} \cdot \sqrt{6})$ $\left[\sqrt{\frac{8}{3}}\right]$

178 $\sqrt[3]{162} : \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[6]{432}\right)$ $[\sqrt[6]{18}]$

179 $\sqrt[3]{a^6b^7} : \sqrt{ab^2} \cdot \sqrt{a^2b}$ $[\sqrt[6]{a^{15}b^{11}}]$

180 $\sqrt[3]{3a^2c} : \sqrt[9]{27a} \cdot \sqrt[3]{9c^2}$ $[\sqrt[9]{729a^5c^9}]$

181 $\left(\sqrt[4]{\frac{x^5y}{z^2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{z}{x^4y}}\right) \cdot \sqrt[4]{\frac{z}{x}}$ $[1]$

182 $\sqrt{\frac{x}{y}} : \sqrt{\frac{x^2}{z}} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}}$ $\left[\sqrt{\frac{z}{x^2}}\right]$

183 $\sqrt{\frac{3ab^2}{c}} : \sqrt{\frac{9b^2}{c}} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}}$ $\left[\frac{a}{3}\right]$

184 $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} : \sqrt{1+\frac{1}{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x-1}$ $\left[\sqrt[6]{\frac{x}{(x-1)^3}}\right]$