1. L'equilibrio statico

Se un corpo inizialmente fermo continua a rimanere fermo, diremo che quel corpo è in **equilibrio statico.** Vale quindi la seguente definizione:

Equilibrio statico

Un corpo è in equilibrio statico se è in quiete e vi rimane permanentemente.

Prima di enunciare le condizioni di equilibrio dei corpi, dobbiamo stabilire un'importante distinzione: quella tra *punti materiali* e *corpi estesi*.

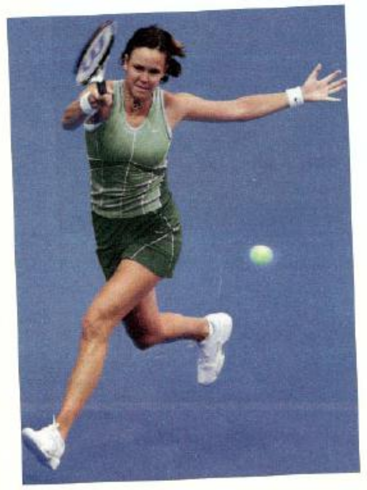
Punti materiali, corpi estesi, corpi rigidi

Punto materiale

Un punto materiale è un oggetto *le cui dimensioni sono trascurabili* rispetto a quelle dello spazio in cui si muove e *la cui struttura interna è irrilevante* per la descrizione del suo moto. Come dice il nome, un punto materiale può essere rappresentato come un punto geometrico dotato di massa.

Corpo esteso

Un corpo esteso è un oggetto *le cui dimensioni e la cui struttura non possono essere trascurate*, perché influenzano il suo moto.



↑ La palla da tennis può comportarsi come un punto materiale oppure come un corpo esteso.

Vi è un'ulteriore differenza tra punti materiali e corpi estesi. Mentre i punti materiali possono solo spostarsi da una posizione a un'altra, cioè sono soggetti esclusivamente a un **moto traslatorio**, i corpi estesi, oltre a spostarsi, possono ruotare attorno a un asse, cioè hanno anche un **moto rotatorio**.

Bisogna tener presente che la distinzione tra punti materiali e corpi estesi *non è assoluta*. Non esistono oggetti che siano in senso assoluto punti materiali, o corpi estesi (fatta eccezione per alcune particelle elementari, come l'elettrone, che sono realmente puntiformi e prive di struttura interna). *Lo stesso oggetto può comportarsi talvolta come un punto materiale, talvolta come un corpo esteso*. Consideriamo, ad esempio, una palla da tennis. Nel momento in cui è colpita da una racchetta, la palla va considerata come un corpo esteso, poiché l'impatto con le corde della racchetta la deforma. Quando è in volo, se si muove solo di moto traslatorio, la palla è un punto materiale, che obbedisce alle leggi del moto dei punti materiali. Ma se il tennista le ha impresso un "effetto", la palla, oltre a traslare, ruoterà, e dovremo trattarla come un corpo esteso e applicare le leggi del moto dei corpi estesi.

Tra i corpi estesi, prenderemo in considerazione solo quelli che non si deformano: i cosiddetti *corpi rigidi*.

Corpo rigido

In un corpo rigido *la distanza tra due punti qualsiasi rimane invariata*.

Oltre all'equilibrio statico esiste anche l'*equilibrio dinamico*: un punto materiale è in equilibrio dinamico quando si sposta con velocità costante, mentre un corpo esteso è in equilibrio dinamico quando si sposta e ruota con velocità costante.
D'ora in poi, quando parleremo di "equilibrio", senza ulteriori specificazioni, intenderemo sempre l'equilibrio statico.

Cominciamo ora a studiare l'equilibrio statico partendo dal caso più semplice, quello del punto materiale.

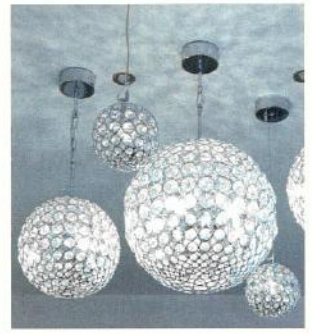
2. L'equilibrio di un punto materiale

La condizione generale di equilibrio di un punto materiale è la seguente:

Condizione generale di equilibrio di un punto materiale

Un punto materiale è in equilibrio se è fermo, cioè se la risultante $\vec{R}$ delle forze che agiscono su di esso è uguale a zero:

$$\vec{R} = 0$$



↑ Esempi di corpi in equilibrio vincolati.

Un portapenne sul banco o un lampadario appeso al soffitto sono due esempi di punti materiali in equilibrio. Entrambi sono soggetti alla forza peso diretta verso il basso, ma sono vincolati a restare fermi da altri oggetti, il banco o il tassello fissato al soffitto. Banco o tassello sono esempi di *vincolo* e la forza che essi esercitano è una *reazione vincolare*.

Vincolo e reazione vincolare

Un vincolo è un corpo che impedisce ad altri corpi di compiere alcuni movimenti, esercitando su di essi una forza $\vec{F}_v$ chiamata genericamente reazione vincolare.

Altri esempi comuni di vincoli sono il pavimento sul quale camminiamo, un chiodo al quale è appeso un quadro, il sostegno di un pensile, il cardine di una porta, una corda alla quale è attaccato un oggetto.
Analizziamo ora alcune situazioni particolari di equilibrio.

L'equilibrio su un piano orizzontale

Consideriamo un barattolo appoggiato su un tavolo. Poiché il barattolo è fermo, cioè è in equilibrio statico, la forza risultante $\vec{R}$ che agisce su di esso deve essere nulla. Quindi la sua forza peso $\vec{P}$, diretta verso il basso, deve essere compensata da una forza verso l'alto esercitata dal tavolo, perpendicolare alla superficie del tavolo, come mostrato in figura 1. Tale forza, indicata con $\vec{F}_\perp$, viene detta **forza** o **reazione normale**, perché è *normale*, cioè perpendicolare, alla superficie del piano.
La forza normale è dovuta all'interazione fra gli atomi di un solido che tendono a opporsi alle variazioni di forma del solido stesso. Quando il barattolo è posto sul tavolo, infatti, causa un'impercettibile compressione della superficie del tavolo, simile alla compressione di una molla e, proprio come una molla, il tavolo esercita una forza per opporsi alla compressione. Quindi, maggiore è il peso dell'oggetto posto sul tavolo, maggiore è la forza normale esercitata dal tavolo per opporsi alla compressione. La forza normale $\vec{F}_\perp$ che il tavolo esercita è la **reazione vincolare** $\vec{F}_v$.

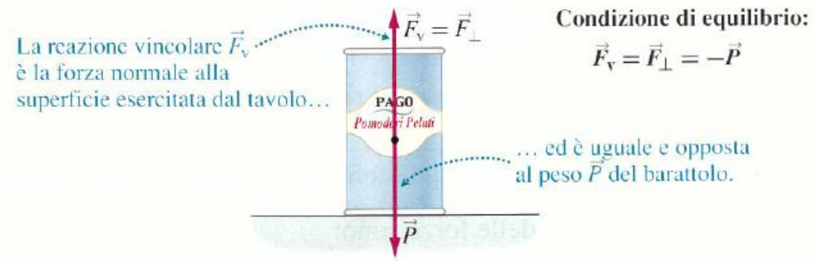


figura 1
Equilibrio di un corpo appoggiato su un piano

Imponiamo la *condizione di equilibrio*: in questo caso le forze sono dirette una verso l'alto e una verso il basso, in direzione perpendicolare al tavolo.
La risultante $\vec{R}$ è data dalla somma vettoriale della forza peso e della reazione vincolare:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}_v$$

Poiché $\vec{R} = 0$, abbiamo:

$$\vec{P} + \vec{F}_v = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \vec{F}_v = -\vec{P}$$

Consideriamo ora il caso in cui sul barattolo agisce un'altra forza $\vec{F}$ diretta verso il basso, ad esempio quella esercitata dalla nostra mano, come in figura 2. La risultante in questo caso è:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_v$$

da cui, imponendo la condizione di equilibrio $\vec{R} = 0$, si ottiene:

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_v = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \vec{F}_v = -(\vec{P} + \vec{F})$$

La reazione vincolare, come si vede, è maggiore del peso del barattolo ed è uguale e opposta a $\vec{P} + \vec{F}$, che è la *forza premente* $\vec{F}_p$ sulla superficie:

$$\vec{F}_v = -\vec{F}_p$$

figura 2
Equilibrio di un corpo su cui agisce una forza premente

In generale, quindi:

> **Reazione vincolare, $\vec{F}_v$**
> La reazione vincolare $\vec{F}_v$ esercitata da una superficie è uguale e opposta alla forza premente $\vec{F}_p$ che agisce sulla superficie:
> $$\vec{F}_v = -\vec{F}_p$$

Se le forze che agiscono su un punto materiale hanno direzioni diverse, la condizione di equilibrio richiede che entrambe le componenti cartesiane della risultante $\vec{R}$ siano nulle, cioè:

$$R_x = 0 \qquad \text{ed} \qquad R_y = 0$$

Ad esempio, consideriamo il caso mostrato in figura 3, in cui sul barattolo agiscono due forze, una orizzontale, $\vec{F}_1$, esercitata da una mano che spinge verso destra, e una inclinata di 30° rispetto alla superficie del tavolo, $\vec{F}_2$, esercitata da un'altra mano che spinge in direzione inclinata verso il basso.

TUTOR Disegno attivo

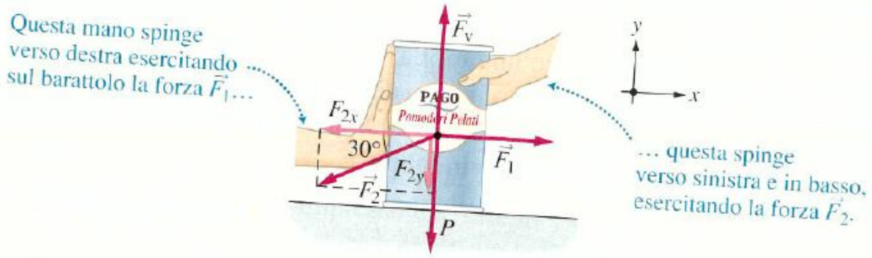


figura 3
Equilibrio di un corpo su cui agiscono forze in direzioni diverse

Scegliamo il sistema di assi come in figura e scriviamo le componenti delle forze nelle direzioni x e y:

$$F_{1x} = F_1 \quad \text{e} \quad F_{1y} = 0 \qquad\qquad F_{2x} = -F_2 \cos 30° \quad \text{e} \quad F_{2y} = -F_2 \,\text{sen}\, 30°$$

Le componenti della risultante $\vec{R}$ delle forze sono:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} \qquad\qquad R_y = F_{1y} + F_{2y} + P + F_v$$

Se il barattolo è fermo le componenti R_x e R_y devono essere entrambe nulle, quindi la condizione di equilibrio è:

$$R_x = 0 \;\rightarrow\; F_{1x} = -F_{2x} \qquad\qquad R_y = 0 \;\rightarrow\; F_v = -(P + F_{1y} + F_{2y})$$

Tenendo conto delle espressioni delle componenti delle forze, la condizione in questo caso specifico si può scrivere:

$$F_1 = -F_{2x} \qquad\qquad F_v = -(P + F_{2y})$$

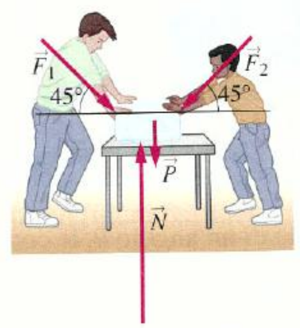
Problem solving 1

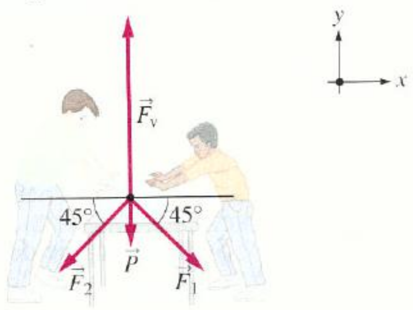
Il blocco di ghiaccio

Un blocco di ghiaccio di 6,0 kg è spinto da due ragazzi che esercitano due forze, $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$, come mostrato in figura. Se l'intensità delle forze è $F_1 = F_2 = 12$ N, determina la reazione vincolare esercitata dal tavolo sul blocco.

Descrizione del problema

La figura mostra la scelta del sistema di coordinate e tutte le forze che agiscono sul blocco di ghiaccio. Notiamo che $\vec{F}_1$ ha la componente x positiva e la componente y negativa, $\vec{F}_2$ ha la componente x e la componente y entrambe negative. Il peso $\vec{P}$ e la reazione vincolare $\vec{F}_v$ hanno soltanto componenti in direzione y. Indicando con m la massa del blocco, il suo peso è $P = -mg$.





Schema delle forze

Strategia

Per calcolare la reazione vincolare $\vec{F}_v$ imponiamo la condizione di equilibrio lungo l'asse y:

$$R_y = 0 \;\rightarrow\; F_v + (P + F_{1y} + F_{2y}) = 0$$

Soluzione

Scriviamo le componenti y delle forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$:

$$F_{1y} = -F_1 \,\text{sen}\, 45° = -(12\text{ N})\,\text{sen}\, 45° = -8{,}5\text{ N}$$
$$F_{2y} = -F_2 \,\text{sen}\, 45° = -(12\text{ N})\,\text{sen}\, 45° = -8{,}5\text{ N}$$

Calcoliamo il peso del blocco:

$$P = -mg = -(6{,}0\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg}) = -59\text{ N}$$

Sommiamo le componenti y di tutte le forze:

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + P + F_v = -8{,}5\text{ N} - 8{,}5\text{ N} - 59\text{ N} + F_v = -76\text{ N} + F_v$$

Poniamo questa somma uguale a zero:

$$-76\text{ N} + F_v = 0$$

Infine ricaviamo la reazione vincolare:

$$F_v = 76\text{ N}$$

Osservazioni

La condizione di equilibrio lungo l'asse x: $R_x = 0 \rightarrow F_{1x} + F_{2x} = 0$ è ovviamente soddisfatta, come possiamo facilmente verificare.
Infatti:

$$F_{1x} = F_1 \cos 45° \qquad\qquad F_{2x} = -F_2 \cos 45°$$

e poichè $F_1 = F_2$, otteniamo

$$F_{1x} + F_{2x} = F_1 \cos 45° - F_1 \cos 45° = 0$$

Prova tu

Quanto vale la reazione vincolare se l'intensità delle forze $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$ è 7,1 N? [69 N]

PLUS
Laboratorio *L'equilibrio di un corpo su un piano inclinato*

L'equilibrio su un piano inclinato

Finora abbiamo preso in considerazione superfici orizzontali, per le quali la reazione vincolare è verticale. In un **piano inclinato**, invece, la reazione vincolare è inclinata rispetto alla verticale.

Consideriamo un corpo appoggiato su un piano inclinato, come mostrato in figura 4. Quando si deve fissare un sistema di coordinate per un piano inclinato, è generalmente *preferibile scegliere gli assi x e y rispettivamente parallelo e perpendicolare alla superficie stessa*, come mostrato in figura. Con questa scelta del sistema di coordinate non c'è alcun moto in direzione y e la reazione vincolare $\vec{F}_v$ punta nel verso positivo delle y.

TUTOR
Disegno attivo

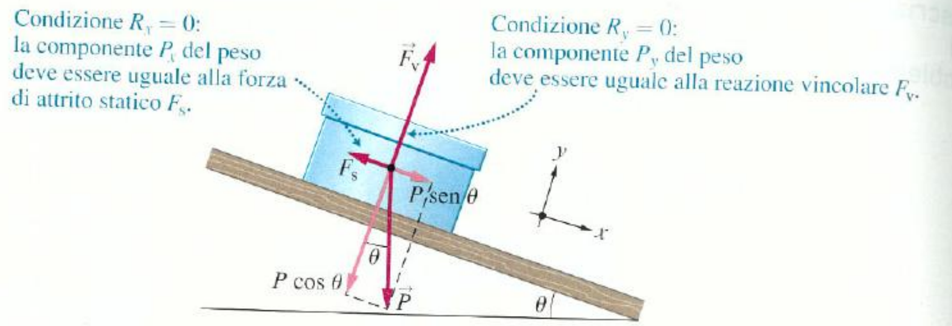


figura 4
Equilibrio di un corpo su un piano inclinato

Se la superficie del piano è inclinata di un angolo θ, le componenti del peso $\vec{P}$ lungo gli assi sono:

$$P_x = P \operatorname{sen}\theta \qquad P_y = -P\cos\theta$$

La condizione di equilibrio $\vec{R} = 0$ equivale a:

$$R_x = 0 \quad \text{e} \quad R_y = 0$$

La condizione $R_x = 0$ richiede che la componente x del peso, $P_x = P \operatorname{sen}\theta$, sia compensata da una forza opposta, che nel caso mostrato in figura è la *forza di attrito statico* F_s:

$$R_x = 0 \quad \rightarrow \quad P \operatorname{sen}\theta - F_s = 0 \qquad \text{cioè} \qquad F_s = P\operatorname{sen}\theta$$

La condizione $R_y = 0$ richiede che la componente y del peso, $P_y = -P\cos\theta$, sia compensata dalla reazione vincolare F_v, perpendicolare alla superficie del piano inclinato:

$$R_y = 0 \quad \rightarrow \quad F_v - P\cos\theta = 0 \qquad \text{cioè} \qquad F_v = P\cos\theta$$

ESERCIZIO

1. Un leone marino di massa $m = 4{,}5 \cdot 10^2$ kg è fermo su una rampa inclinata di un angolo $\theta = 12°$. Calcola l'intensità della reazione vincolare e della forza di attrito statico sull'animale.

Il peso del leone marino è:

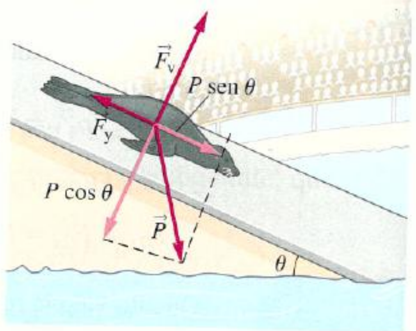
$$P = (4{,}5 \cdot 10^2\ \text{kg})(9{,}81\ \text{N/kg}) = 4{,}4 \cdot 10^3\ \text{N}$$

Se il leone marino è fermo, la reazione vincolare F_v è uguale alla componente P_y:

$$F_v = P\cos\theta = (4{,}4 \cdot 10^3\ \text{N})\cos 12° = 4{,}3 \cdot 10^3\ \text{N}$$

Se il leone marino è fermo, la forza di attrito statico su di esso è uguale alla componente P_x:

$$F_s = P\operatorname{sen}\theta = (4{,}4 \cdot 10^3\ \text{N})\operatorname{sen} 12° = 9{,}1 \cdot 10^2\ \text{N}$$



L'equilibrio di un corpo appeso

Supponiamo di prendere un pezzo di corda sottile e di tirare uno degli estremi verso destra con una forza $\vec{T}$ e l'altro verso sinistra con una forza di uguale intensità. La corda si tende e diremo che in essa c'è una **tensione** $\vec{T}$. Più precisamente, se tagliassimo la corda in un punto qualsiasi, la tensione T sarebbe la forza necessaria a tenere assieme le due parti, come mostrato in figura 5. Notiamo che, in un qualsiasi punto della corda, la tensione è la stessa a destra e a sinistra e, se la corda ha una massa trascurabile, la tensione è la stessa in ogni punto.

ATTENZIONE
In questo testo, salvo avviso contrario, supporremo che tutte le funi, le corde e i cavi siano praticamente senza massa e quindi che la tensione sia la stessa lungo tutta la loro lunghezza.

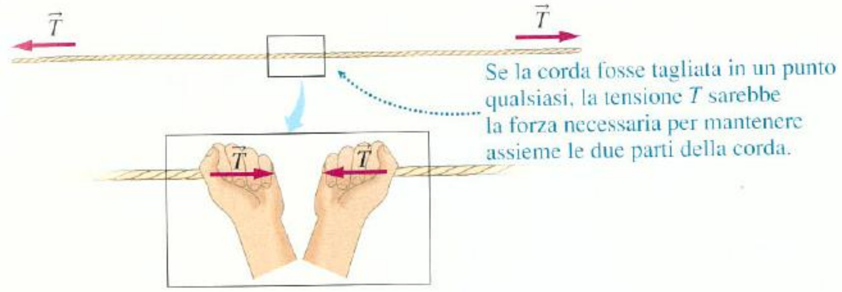


figura 5
Tensione in una corda

Consideriamo ora una corda attaccata con un estremo al soffitto e con l'altro a una scatola di peso $\vec{P}$, come mostrato in figura 6a. La corda agisce da *vincolo*, mantenendo la scatola ferma.

Per la condizione generale di equilibrio, la tensione nel punto in cui è attaccata la scatola deve essere uguale al peso della scatola stessa:

$$T = P$$

La tensione sul soffitto è diretta verso il basso ed è bilanciata dalla reazione vincolare F_v del soffitto:

$$T = F_v$$

Possiamo verificare facilmente che la forza vincolare ha la stessa intensità del peso del corpo appendendo il corpo a un dinamometro.

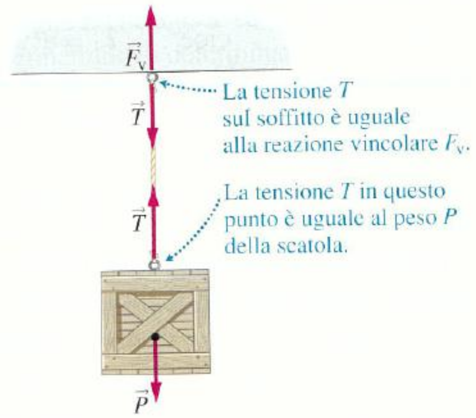


figura 6
Equilibrio di un corpo appeso

Spesso, per modificare la direzione della forza esercitata da una corda, vengono utilizzate delle carrucole, come mostrato in figura 7. Nel caso ideale, una **carrucola** non ha massa, né attriti negli ingranaggi. Una carrucola ideale *cambia semplicemente la direzione della tensione in una corda*, senza modificare la sua intensità.

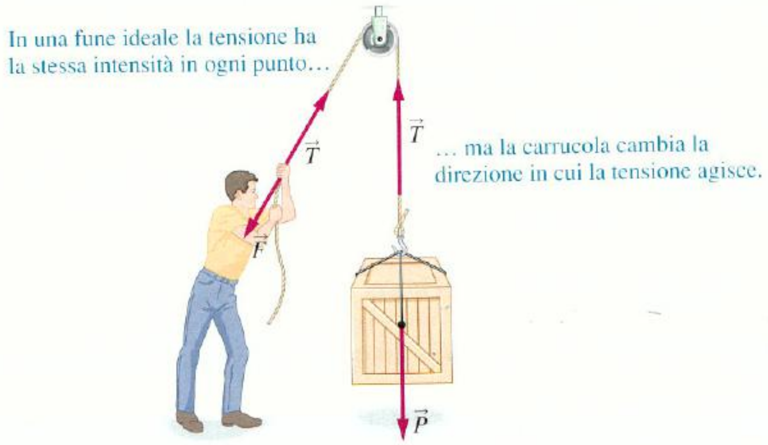


figura 7
La carrucola cambia la direzione della tensione
Una carrucola non modifica l'intensità della forza, ma ne cambia la direzione. Con un sistema di carrucole si può invece modificare anche l'intensità della forza.

Consideriamo la situazione illustrata in figura 8, nella quale una persona regge un secchio d'acqua, utilizzando una fune che scorre su una carrucola. Se il secchio è fermo, qual è la tensione $\vec{T}_1$ nella fune attaccata al secchio e quale la tensione $\vec{T}_2$ nel cavo che sostiene la carrucola? Poiché il secchio e la carrucola sono in equilibrio, la forza risultante su ciascuno di essi deve essere zero. Nella figura vediamo che *sul secchio* agiscono due forze: il peso $\vec{P}$ diretto verso il basso e la tensione della fune $\vec{T}_1$, diretta verso l'alto.

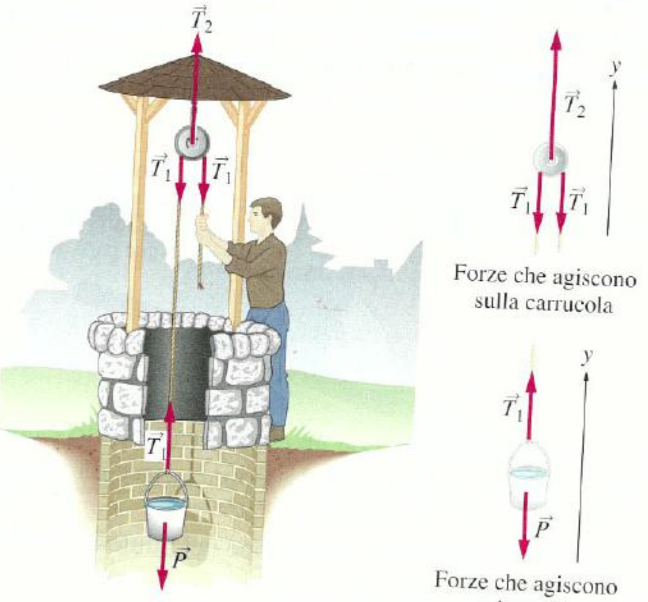


figura 8
Condizione di equilibrio di un secchio sostenuto con una carrucola

La condizione di equilibrio è:

$$T_1 - P = 0 \qquad \text{cioè} \qquad T_1 = P$$

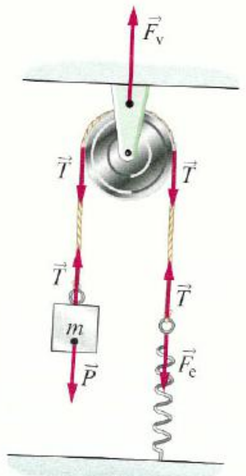
Quindi la tensione e il peso devono avere la stessa intensità. Notiamo che questa è anche l'intensità della forza che la persona deve esercitare sulla fune verso il basso, come ci aspettavamo.

Nella figura vediamo che *sulla carrucola* agiscono tre forze: la tensione $\vec{T}_2$ nel cavo, diretta verso l'alto, la tensione $\vec{T}_1$ nella parte di fune attaccata al secchio, verso il basso, e la tensione $\vec{T}_1$ nella parte di fune tirata dalla persona, verso il basso. Non abbiamo incluso il peso della carrucola, perché la consideriamo ideale, cioè priva di massa. La risultante delle forze deve essere nulla:

$$T_2 - T_1 - T_1 = 0 \qquad \text{cioè} \qquad T_2 = 2T_1 = 2P$$

La tensione T_2 nel cavo che sostiene la carrucola, quindi, è il doppio del peso del secchio.

ESERCIZIO



2. Un blocco di massa $m = 2{,}5$ kg è appeso a una carrucola e collegato a una molla di costante elastica $k = 280$ N/m. Calcola la tensione T nella corda in condizioni di equilibrio, l'allungamento della molla e la reazione vincolare F_v del soffitto.

La tensione T nella corda è uguale al peso P del blocco, quindi:

$$T = P = (2{,}5\ \text{kg})(9{,}81\ \text{N/kg}) = 25\ \text{N}$$

Anche la forza elastica della molla è uguale alla tensione nella corda, cioè $F_e = 25$ N, e quindi l'allungamento della molla è:

$$x = \frac{F_e}{k} = \frac{25\ \text{N}}{280\ \text{N/m}} = 8{,}9\ \text{cm}$$

In condizione di equilibrio $F_v - P - F_e = 0$ quindi la reazione vincolare del soffitto è:

$$F_v = P + F_e = 2P = 50\ \text{N}$$

Problem solving 2

Il vaso appeso

Per appendere un vaso di fiori di 6,20 kg un giardiniere utilizza due cavi, uno fissato orizzontalmente a una parete, l'altro agganciato al soffitto in modo da formare un angolo $\theta = 40°$ rispetto all'orizzontale. Determina la tensione in ciascun cavo.

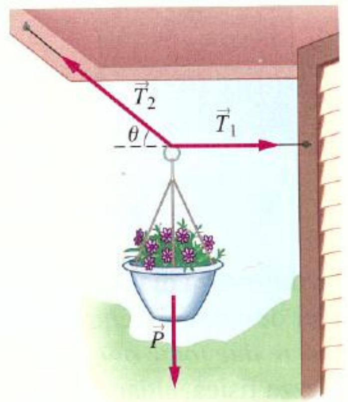
Descrizione del problema

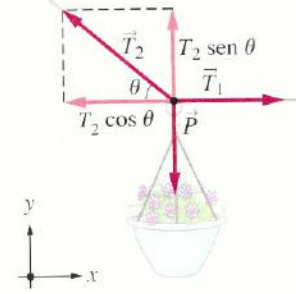
Scegliamo il consueto sistema di coordinate, con l'asse x positivo verso destra e l'asse y positivo verso l'alto. Con questa scelta, la tensione $\vec{T}_1$ è diretta nel verso positivo delle x, il peso $\vec{P}$ è diretto nel verso negativo delle y e la tensione $\vec{T}_2$ ha la componente x negativa e la componente y positiva.

Le componenti di ciascuna forza agente sul vaso sono:

$$\vec{T}_1 \begin{cases} T_{1x} = T_1 \\ T_{1y} = 0 \end{cases} \qquad \vec{T}_2 \begin{cases} T_{2x} = -T_2 \cos\theta \\ T_{2y} = T_2 \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$\vec{P} \begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -mg \end{cases}$$





Schema delle forze

Strategia

Il vaso è fermo, quindi la forza risultante $\vec{R}$ che agisce su di esso è uguale a zero. Si ha pertanto $R_x = 0$ ed $R_y = 0$. Queste due condizioni permettono di determinare l'intensità delle due tensioni, T_1 e T_2.

Soluzione

Consideriamo l'asse x e imponiamo la condizione di equilibrio $R_x = 0$; questa condizione fornisce una relazione tra T_1 e T_2:

$$R_x = 0 \quad \rightarrow \quad T_{1x} + T_{2x} + P_x = T_1 + (-T_2 \cos\theta) + 0 = 0$$
$$T_1 = T_2 \cos\theta$$

Consideriamo l'asse y e imponiamo la condizione di equilibrio $R_y = 0$; questa volta la condizione permette di determinare T_2 in funzione del peso mg:

$$R_y = 0 \quad \rightarrow \quad T_{1y} + T_{2y} + P_y = 0 + T_2 \operatorname{sen}\theta + (-mg) = 0$$
$$T_2 \operatorname{sen}\theta = mg$$

Utilizziamo la relazione precedente per determinare T_2:

$$T_2 = \frac{mg}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{(6{,}20\ \text{kg})(9{,}81\ \text{N/kg})}{\operatorname{sen} 40°} = 94{,}6\ \text{N}$$

Utilizziamo la relazione tra le due tensioni per determinare T_1:

$$T_1 = T_2 \cos\theta = (94{,}6\ \text{N}) \cos 40° = 72{,}5\ \text{N}$$

Osservazioni

Anche se i cavi che tengono sospeso il vaso sono due, entrambi hanno una **tensione maggiore del peso del vaso**, $mg = 60{,}8$ N. Quando un oggetto è appeso a un cavo, è possibile che la tensione nel cavo sia molto più grande del peso dell'oggetto. Ciò deve essere tenuto in considerazione da architetti e ingegneri quando progettano la struttura di un edificio.

Prova tu

Determina T_1 e T_2 nei casi in cui il secondo cavo forma con l'orizzontale un angolo:
a) $\theta = 20°$ *b)* $\theta = 60°$ *c)* $\theta = 90°$

[*a)* $T_1 = 167$ N, $T_2 = 178$ N; *b)* $T_1 = 35{,}1$ N, $T_2 = 70{,}2$; *c)* $T_1 = 0$, $T_2 = mg = 60{,}8$ N]