ESPLORAZIONE: ERONE E LA RADICE QUADRATA

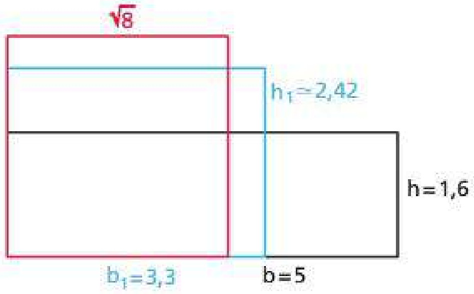
L'**algoritmo di Erone** è un procedimento che permette di calcolare la radice quadrata di un numero. Possiamo spiegarlo meglio con un esempio, utilizzando un'interpretazione geometrica.

Cerchiamo di calcolare $\sqrt{8}$.
$\sqrt{8}$ può essere intesa come la misura del lato di un quadrato di area 8. Vediamo come costruire tale quadrato operando per approssimazioni successive. Scegliamo un numero $b < 8$, per esempio 5, e il numero $h = \frac{8}{b} = \frac{8}{5} = 1,6$.
Costruiamo il rettangolo di lati 5 e $\frac{8}{5}$, che è equivalente al quadrato perché ha area 8.

I valori di b e h approssimano la misura del lato del quadrato, uno per eccesso e l'altro per difetto.
Calcoliamo ora il valore medio b_1 fra b e h:

$$b_1 = \frac{b+h}{2} = \frac{5+1,6}{2} = 3,3$$

e consideriamo poi $h_1 = \frac{8}{b_1} = \frac{8}{3,3} = 2,42\ldots$



Costruiamo un nuovo rettangolo i cui lati misurino b_1 e h_1. Anche in questo caso l'area del rettangolo vale 8, b_1 è un valore approssimato per eccesso della misura del lato del quadrato, mentre h_1 è un valore approssimato per difetto.
Poiché b_1 è il valore medio fra b e h, b_1 approssima $\sqrt{8}$ meglio di b.
Possiamo ora considerare $b_2 = \frac{b_1 + h_1}{2}$ e $\frac{8}{b_2}$, e procedere poi in questo modo quante volte vogliamo: le dimensioni dei rettangoli forniranno approssimazioni sempre più precise di $\sqrt{8}$, una per eccesso, l'altra per difetto. Dalla tabella (in cui i valori decimali sono approssimati) possiamo notare che con questo procedimento giungiamo piuttosto rapidamente a un valore di $\sqrt{8}$ con una buona approssimazione. Infatti, se calcoliamo $\sqrt{8}$ con una calcolatrice, otteniamo $\sqrt{8} = 2,828\ldots$

b	$h = \frac{8}{b}$	$\frac{b+h}{2}$
5	1,6	3,3
3,3	2,4242	2,8621
2,8621	2,7951	2,8286
…	…	…

IN DIECI RIGHE
Erone non è stato il solo ad affrontare il problema dell'estrazione della radice quadrata.
Descrivi altri metodi in una relazione redatta con il computer.

Cerca nel web: metodi calcolo radice quadrata, Archita, Bombelli, Newton.

3. I radicali

Abbiamo visto che la radice quadrata è l'operazione inversa della potenza con esponente 2 e che il simbolo $\sqrt{a}$ indica la radice quadrata di a, che esiste se $a \geq 0$ e rappresenta un numero reale non negativo.

Allo stesso modo possiamo parlare di radice cubica come operazione inversa della potenza con esponente 3.
Per esempio, la radice cubica di 8 è 2 perché $2^3 = 8$ e la radice cubica di -27 è -3 perché $(-3)^3 = -27$.

Ogni numero reale a ha sempre una sola radice cubica in $\mathbb{R}$ che si indica con $\sqrt[3]{a}$.
In generale la radice n-esima è l'operazione inversa della potenza con esponente n.

Si legge *ennesima*.

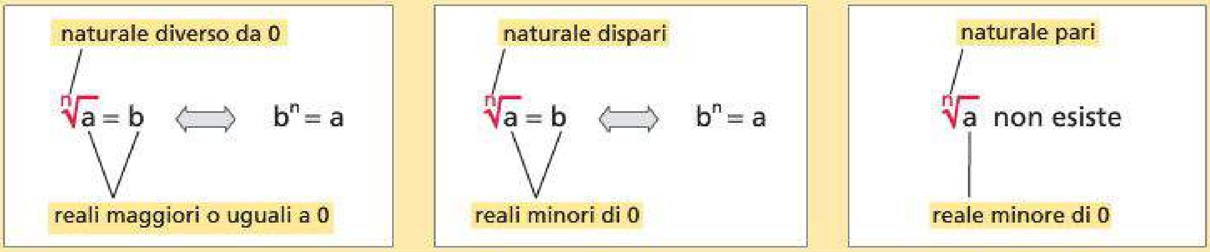
DEFINIZIONE

Radice di un numero reale a

Dati un numero reale a e un numero naturale $n \neq 0$:

- se $a \geq 0$, la radice n-esima di a è quel numero reale $b \geq 0$ la cui potenza con esponente n è uguale ad a;
- se $a < 0$ e n dispari, la radice n-esima di a è quel numero reale $b < 0$ la cui potenza con esponente n è uguale ad a;
- se $a < 0$ e n pari, non esiste la radice n-esima di a.

La radice n-esima di a si indica con il simbolo $\sqrt[n]{a}$.



ESEMPIO

$\sqrt[4]{81} = 3$, perché $3^4 = 81$.
$\sqrt[5]{32} = 2$, perché $2^5 = 32$.
$\sqrt[2]{0} = 0$, perché $0^2 = 0$.
$\sqrt[7]{-128} = -2$, perché $(-2)^7 = -128$.
$\sqrt[4]{-16}$ non esiste, perché non esiste un numero b tale che $b^4 = -16$.

Dalla definizione di radice n-esima si deduce la seguente proprietà:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

con $a \geq 0$ se n è pari, $\forall a \in \mathbb{R}$ se n è dispari.

Nell'insieme dei numeri reali l'operazione di radice è sempre interna, tranne il caso in cui si hanno $a < 0$ e n pari; si può infatti dimostrare che **la radice n-esima di un numero reale positivo o nullo esiste sempre ed è unica**.

Un po' di terminologia

La scrittura $\sqrt[n]{a}$ viene detta **radicale**.

Il numero n viene detto **indice** del radicale; il numero a si chiama **radicando**. Se il radicando è scritto sotto forma di potenza, l'esponente di tale potenza si chiama **esponente del radicando**.

Per la radice quadrata l'indice del radicale può essere omesso: $\sqrt{5}$ è un modo diverso di scrivere $\sqrt[2]{5}$. I radicali con indice 2 vengono detti **radicali quadratici**, quelli con indice 3 **radicali cubici**.

Casi particolari

Per ogni n naturale diverso da 0 e per ogni a reale si ha:

1. $\sqrt[1]{a} = a$ (infatti $a^1 = a$)
2. $\sqrt[n]{0} = 0$ (infatti $0^n = 0$)
3. $\sqrt[n]{1} = 1$.

$\sqrt[1]{2} = 2$; $\sqrt[2]{0} = 0$; $\sqrt[2]{1} = 1$.

Non si attribuisce alcun significato alla radice con l'indice uguale a 0:

$\sqrt[0]{a}$ non ha significato.

$\sqrt[0]{2}$ non ha significato perché nessun numero elevato a 0 dà 2.

4. I radicali in $\mathbb{R}_0^+$

Ci limiteremo ora, per semplicità, allo studio delle proprietà dei radicali nell'insieme dei numeri reali non negativi che abbiamo indicato con $\mathbb{R}_0^+$. Pertanto considereremo espressioni del tipo:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ con } a, b \geq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

Le condizioni di esistenza dei radicali in $\mathbb{R}_0^+$

Nell'espressione $\sqrt[n]{a}$ il radicando deve essere un numero reale positivo o nullo. Quando il radicando è un'espressione letterale, bisogna porre la condizione che essa sia maggiore o uguale a 0, indipendentemente dall'indice di radice.

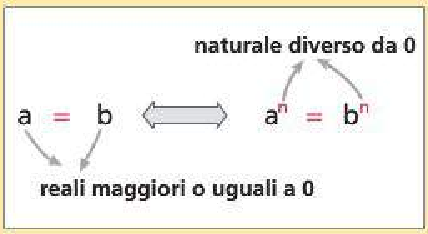
ESEMPIO

$\sqrt[3]{x-1}$ ha come condizione di esistenza $x - 1 \geq 0$, ossia: C.E.: $x \geq 1$.

Per dimostrare i prossimi teoremi utilizzeremo spesso la seguente proprietà, che ci limitiamo a enunciare.

PROPRIETÀ

Dati due numeri reali a e b, *non negativi*, e un numero naturale n, *diverso da* 0, se a e b sono uguali, sono uguali anche le loro potenze n-esime e viceversa.



La proprietà non vale in generale se $a < 0$ o $b < 0$: per esempio,

$(-5)^2 = (+5)^2$,

ma $-5 \neq 5$!

La proprietà invariantiva dei radicali

TEOREMA

Dato un radicale, si può ottenere un radicale equivalente moltiplicando per uno stesso numero naturale (*diverso da* 0) sia l'indice del radicale sia l'esponente del radicando.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

DIMOSTRAZIONE

Per la definizione di radicale in $\mathbb{R}_0^+$, $\sqrt[n]{a^m}$ e $\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ indicano numeri positivi o nulli. Eleviamo i due radicali allo stesso esponente $n \cdot p$.

Primo membro

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n \cdot p} =$$

Per la terza proprietà delle potenze:

$$= \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^p =$$

Per la definizione di radice:

$$= [a^m]^p =$$

Per la terza proprietà delle potenze:

$$= a^{m \cdot p}.$$

Secondo membro

$$\left(\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}\right)^{n \cdot p} =$$

Per la definizione di radice:

$$= a^{m \cdot p}.$$

Poiché le potenze dei due radicali forniscono lo stesso risultato, possiamo scrivere:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n \cdot p} = \left(\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}\right)^{n \cdot p}.$$

Essendo le basi delle potenze due numeri positivi o nulli, per la proprietà $a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$ abbiamo:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}.$$

ESEMPIO

1. $\sqrt[2]{2} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[6]{8}$.
2. $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3 \cdot 5]{a^{2 \cdot 5}} = \sqrt[15]{a^{10}}$.

Due radicali sono **equivalenti** se rappresentano lo stesso numero reale, positivo o nullo. Per esempio, $\sqrt{4}$ e $\sqrt[6]{64}$ sono equivalenti perché $\sqrt{4} = 2$ e $\sqrt[6]{64} = 2$.

Terza proprietà delle potenze:

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V34a

La semplificazione di radicali

Per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza, possiamo anche scrivere la proprietà invariantiva nel modo seguente:

$$\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ (con } a^m \geq 0).$$

TEOREMA

Dato un radicale, si può ottenere un radicale equivalente dividendo l'indice della radice e l'esponente del radicando per un divisore comune.

$$\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (:p)$$

In questo caso si dice che si è *semplificato* il radicale.

ESEMPIO

1. $\sqrt[9]{5^6} = \sqrt[9:3]{5^{6:3}} = \sqrt[3]{5^2}$.
2. $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[6:2]{a^{4:2}} = \sqrt[3]{a^2}$.

▶ È **sbagliato** semplificare così:
$\sqrt[6]{2^3+5^3} = \sqrt{2+5}$.

DEFINIZIONE

Radicale irriducibile

Un radicale si dice irriducibile (cioè non semplificabile) quando il suo indice e l'esponente del radicando sono primi fra loro.

▶ Non è sempre possibile semplificare un radicale. Per esempio, il radicale $\sqrt[5]{a^2}$ non si può semplificare, perché 5 e 2 non hanno divisori comuni, tranne l'unità.

ESEMPIO $\sqrt[3]{5^4}$ è un radicale irriducibile, perché 3 e 4 sono primi fra loro.

Per semplificare un radicale e renderlo irriducibile, occorre:

a) cercare il M.C.D. fra indice ed esponente del radicando;
b) dividere l'indice e l'esponente per il loro M.C.D.

ESEMPIO Rendiamo irriducibile il radicale $\sqrt[20]{7^{12}}$.

a) M.C.D. (20; 12) = 4;
b) dividiamo per 4 l'indice e l'esponente del radicando:

$$\sqrt[20]{7^{12}} = \sqrt[20:4]{7^{12:4}} = \sqrt[5]{7^3}.$$

La semplificazione e il valore assoluto

Per semplificare il radicale $\sqrt[4]{(-5)^2}$ **non** possiamo scrivere:

$$\sqrt[4]{(-5)^2} = \sqrt[2\cdot 2]{(-5)^2} = \sqrt[2]{-5}$$

perché, essendo il radicando negativo, l'ultimo membro non rappresenta un numero reale.

▶ Osserva che $\sqrt[4]{(-5)^2}$ è un radicale in $\mathbb{R}_0^+$ perché l'esponente 2 è pari e dunque $(-5)^2 > 0$.
Non è invece un radicale in $\mathbb{R}_0^+$ il radicale $\sqrt[15]{(-5)^9}$, perché $(-5)^9 < 0$.

Tuttavia la semplificazione è possibile perché l'esponente del radicando è pari, e perciò possiamo scrivere $(-5)^2 = (+5)^2$, e poiché $(+5)^2 = |-5|^2$, si ha:

$$\sqrt[4]{(-5)^2} = \sqrt[4]{(+5)^2} = \sqrt[4]{|-5|^2} = \sqrt{|-5|} = \sqrt{5}.$$

In generale, **se $a < 0$ e $m \cdot p$ è pari**, risulta:

$$\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{|a|^m}.$$

Per esempio: $\sqrt[8]{(-2)^2} = \sqrt[4]{|-2|} = \sqrt[4]{2}$.

In particolare, se n è pari:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

che nel caso di $n = 2$ diventa:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

ESEMPIO Semplifichiamo il radicale:

$$\sqrt{(a-1)^2}.$$

Poiché a è una variabile che può assumere qualunque valore, l'espressione $(a-1)^2$ è non negativa, mentre l'espressione $a-1$ può essere sia positiva sia negativa. Per poter semplificare occorre utilizzare il valore assoluto:

$$\sqrt{(a-1)^2} = |a-1|.$$

La riduzione di radicali allo stesso indice

Applicando la proprietà invariantiva, si possono trasformare due o più radicali in altri che hanno lo stesso indice. In particolare, si può ridurli a radicali che abbiano il **minimo comune indice**.

I passaggi necessari sono due:

a) cercare il m.c.m. fra gli indici;
b) trasformare ogni radicale in uno equivalente, che ha per indice il m.c.m. trovato.

ESEMPIO Riduciamo al minimo comune indice i seguenti radicali.

$$\sqrt[5]{2a^2};\ \sqrt[4]{a^3}\ (\text{con } a \geq 0).$$

a) m.c.m. $(5; 4) = 20$;

b) eleviamo ogni radicando al quoziente fra il m.c.m. e l'indice; nel nostro caso, rispettivamente $20 : 5 = 4$ e $20 : 4 = 5$.

$$\sqrt[5]{2a^2} = \sqrt[5 \cdot 4]{(2a^2)^4} = \sqrt[20]{16a^8}; \quad \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4 \cdot 5]{(a^3)^5} = \sqrt[20]{a^{15}}.$$

Il confronto di radicali

Si dimostra che fra due radicali con lo stesso indice è maggiore quello che ha il radicando maggiore. Per esempio, $\sqrt[5]{28} > \sqrt[5]{12}$, poiché $28 > 12$.

Per confrontare radicali con indici diversi bisogna ridurli prima a radicali che abbiano lo stesso indice.

ESEMPIO

Confrontiamo i due radicali $\sqrt[4]{5}$ e $\sqrt[6]{8}$.
Riduciamoli allo stesso indice:

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}, \quad \sqrt[6]{8} = \sqrt[12]{8^2} = \sqrt[12]{64}.$$

Poiché $64 < 125$, anche $\sqrt[12]{64} < \sqrt[12]{125}$, quindi $\sqrt[6]{8} < \sqrt[4]{5}$.

5. La moltiplicazione e la divisione fra radicali

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V35a

La moltiplicazione fra radicali

Si possono moltiplicare due o più radicali se questi hanno lo stesso indice. Vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA

Teorema del prodotto

Il prodotto di due radicali con lo stesso indice è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi, ossia

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

con a e b reali, $a \geq 0$, $b \geq 0$ e n naturale, $n \neq 0$.

▶ In particolare, per i radicali quadratici:
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

DIMOSTRAZIONE

Eleviamo i due membri dell'uguaglianza allo stesso esponente n.
Otteniamo:

Primo membro

$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n =$

Per la quarta proprietà delle potenze:
$= (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n =$

Per la definizione di radice:
$= a \cdot b$.

Secondo membro

$(\sqrt[n]{a \cdot b})^n =$

Per la definizione di radice:
$= a \cdot b$.

▶ Quarta proprietà delle potenze:
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Poiché le potenze n-esime di $\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$ e di $\sqrt[n]{ab}$ forniscono lo stesso risultato $a \cdot b$, concludiamo che sono uguali anche le loro basi, quindi:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

Con a e b non negativi:
$a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$.

ESEMPIO

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{2 \cdot 5} = \sqrt[4]{10}.$$

In particolare, moltiplicando un radicale quadratico per se stesso si ottiene il radicando:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3^2} = 3.$$

Se i radicali hanno **indice diverso**, per moltiplicarli è necessario ridurli al loro minimo comune indice.

ESEMPIO

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{8 \cdot 25} = \sqrt[6]{200}.$$

La divisione fra radicali

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V35b

Si possono dividere tra loro due radicali se questi hanno lo stesso indice. Vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA

Teorema del quoziente

Il quoziente di due radicali (il secondo *diverso da* 0) con lo stesso indice è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi.

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} : \sqrt[n]{\boldsymbol{b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}},$$

con a e b reali, $a \geq 0$ e $b > 0$, n naturale, $n \neq 0$.

La dimostrazione è analoga a quella del teorema del prodotto.

Anche per le divisioni valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per le moltiplicazioni.

ESEMPIO

1. $\sqrt[5]{8} : \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{8 : 2} = \sqrt[5]{4}$.
2. $\sqrt[3]{a} : \sqrt[4]{b} = \sqrt[12]{a^4} : \sqrt[12]{b^3} = \sqrt[12]{\dfrac{a^4}{b^3}}$ (con $a \geq 0$ e $b > 0$).

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V36a

Il trasporto di un fattore fuori dal segno di radice

Riprendiamo l'uguaglianza:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b},\qquad \text{con } a\geq 0 \text{ e } b\geq 0.$$

Per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza possiamo scrivere

$$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b},$$

che significa: la radice n-esima del prodotto $a\cdot b$ è uguale al prodotto della radice n-esima di a per la radice n-esima di b. In altre parole: un radicale il cui radicando è scomposto in fattori **non negativi** è uguale al prodotto di più radicali con lo stesso indice che hanno per radicandi i diversi fattori.

Questa proprietà permette di **trasportare fuori dal segno di radice i fattori del radicando che hanno come esponente un multiplo di n.**

Nel radicale $\sqrt[3]{2^3+5}$ **non** si può portare fuori 2 perché 2^3 è un addendo e non un fattore del radicando.

ESEMPIO

1. Consideriamo il radicale $\sqrt[3]{a^9\cdot b^2}$, con $a\geq 0$.

   Applichiamo il teorema del prodotto e poi la proprietà invariantiva:

   $$\sqrt[3]{a^9\cdot b^2}=\sqrt[3]{a^9}\cdot\sqrt[3]{b^2}=a^3\cdot\sqrt[3]{b^2}.$$

   Il fattore a^9 è stato portato fuori dalla radice cubica ed è diventato a^3.

2. Semplifichiamo il radicale $\sqrt[3]{a^{13}}$, con $a\geq 0$.
   Il fattore a^{13} è una potenza con esponente maggiore dell'indice, ma non multiplo. Esso si può scrivere come prodotto $a^{12}\cdot a$. Pertanto:

   $$\sqrt[3]{a^{13}}=\sqrt[3]{a^{12}\cdot a}=\sqrt[3]{a^{12}}\cdot\sqrt[3]{a}=a^4\cdot\sqrt[3]{a}.$$

   Notiamo che la divisione 13 : 3 ha come quoziente 4 e resto 1.

$\sqrt[3]{a^{13}}=\sqrt[3]{a^{3\cdot4+1}}=$
$=\sqrt[3]{a^{3\cdot4}\cdot a^1}=$
$=\sqrt[3]{a^{3\cdot4}}\cdot\sqrt[3]{a^1}=a^4\cdot\sqrt[3]{a}$
(con $a\geq 0$).

In generale, considerato il radicale $\sqrt[n]{a^m}$, con $a\geq 0$ e $m\geq n$, e indicati con q il quoziente di $m:n$ e con r il resto (e quindi, $m=n\cdot q+r$), si ha:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{nq+r}}=\sqrt[n]{a^{n\cdot q}\cdot a^r}=\sqrt[n]{a^{n\cdot q}}\cdot\sqrt[n]{a^r}=a^q\sqrt[n]{a^r}.$$

Quando si vuol portare fuori radice un fattore di cui non si conosce il segno, si scrive tale fattore in valore assoluto.

ESEMPIO

$\sqrt{5a^2}$, se $a\in\mathbb{R}$, diventa $\sqrt{5}\,\sqrt{a^2}=\sqrt{5}\,|a|$.

6. La potenza e la radice di un radicale

La potenza di un radicale

TEOREMA

La potenza m-esima di un radicale è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando la potenza m-esima del radicando, ossia

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m},$$

con n e m naturali, $n \neq 0$ e $m \neq 0$, e a reale, $a \geq 0$.

> Nei radicali quadratici: $(\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}$.

DIMOSTRAZIONE

Eleviamo a n entrambi i membri dell'uguaglianza.

Primo membro

$[(\sqrt[n]{a})^m]^n =$

Per la terza proprietà delle potenze:
$= (\sqrt[n]{a})^{m \cdot n} =$

Per la stessa proprietà:
$= [(\sqrt[n]{a})^n]^m =$

Per la definizione di radice:
$= a^m$.

Secondo membro

$(\sqrt[n]{a^m})^n =$

Per la definizione di radice:
$= a^m$.

I due membri sono uguali alla stessa espressione a^m e quindi sono uguali fra loro. Poiché le potenze n-esime delle due espressioni $(\sqrt[n]{a})^m$ e $\sqrt[n]{a^m}$ sono uguali, concludiamo che sono uguali anche le espressioni stesse.

ESEMPIO

1. $(\sqrt[5]{3})^4 = \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{81}$.

2. $(\sqrt[4]{a^3})^5 = \sqrt[4]{(a^3)^5} = \sqrt[4]{a^{15}} = a^3 \cdot \sqrt[4]{a^3}$ (con $a \geq 0$).

In particolare, $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$.

> $(\sqrt[3]{2})^3 = \sqrt[3]{2^3} = 2$.

La radice di un radicale

TEOREMA

La radice m-esima di un radicale di indice n è un radicale che ha per indice il prodotto degli indici $m \cdot n$ e per radicando lo stesso radicando.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a},$$

con m e n naturali, $n \neq 0$ e $m \neq 0$, e a reale, $a \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE

Eleviamo entrambi i membri dell'uguaglianza allo stesso esponente $m \cdot n$ e dimostriamo che

$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{m \cdot n} = (\sqrt[m \cdot n]{a})^{m \cdot n}.$$

Primo membro

$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{m \cdot n} =$$

Per la terza proprietà delle potenze:

$$= [(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{m}]^{n} =$$

Per la definizione di radice:

$$= [\sqrt[n]{a}]^{n} = a.$$

Secondo membro

$$(\sqrt[m \cdot n]{a})^{m \cdot n} =$$

Per la definizione di radice:

$$= a.$$

I due membri sono entrambi uguali ad a e quindi sono uguali fra di loro.

Poiché le potenze di esponente $m \cdot n$ dei due radicali $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ e $\sqrt[m \cdot n]{a}$ sono uguali, concludiamo che sono uguali anche i radicali stessi.

Per la proprietà commutativa della moltiplicazione $m \cdot n = n \cdot m$, e si ha:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Pertanto **è possibile scambiare gli indici delle radici**. Ciò può rendere più immediata la semplificazione di un radicale.

ESEMPIO

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a} \text{ (con } a \geq 0).$$

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V36c

Il trasporto di un fattore dentro al segno di radice

Dato il radicale $3 \cdot \sqrt[4]{5}$, è possibile portare il fattore 3 sotto il segno di radice, tenendo presente che $3 = \sqrt[4]{3^4}$.

Possiamo scrivere: $3 \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 5}$.

In generale, **se $a \geq 0$**,

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b},$$

cioè, per trasportare dentro alla radice un fattore non negativo, occorre elevarlo all'indice del radicale.

▶ Se $n = 2$, si ha:
$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$
(con $a, b \geq 0$).

ESEMPIO

1. $2\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{56}$. **2.** $3a^2\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{(3a^2)^3 b} = \sqrt[3]{27a^6 b}$.

▶ Possiamo portare dentro radice $(3a^2)^3$, perché è sempre $3a^2 \geq 0$.

Osservazione. I fattori negativi non vengono portati dentro la radice: il segno meno resta fuori e viene portato dentro il valore assoluto elevato all'indice del radicale.

ESEMPIO

$$-3\sqrt{5} = -\sqrt{9 \cdot 5} = -\sqrt{45}.$$

▶ Il valore assoluto di -3 è 3.

7. L'addizione e la sottrazione di radicali

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V37a

Non sempre è possibile semplificare espressioni che contengono somme o differenze di radicali.

ESEMPIO

$\sqrt{4}+\sqrt{9}$ non è $\sqrt{4+9}$! Infatti:
$\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$, mentre $\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

Analogamente, $\sqrt{9}-\sqrt{4}$ non è $\sqrt{9-4}$! Infatti,
$\sqrt{9}-\sqrt{4}=3-2=1$,
mentre $\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$.

In generale:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b} \quad \text{e} \quad \sqrt{a}-\sqrt{b}\neq\sqrt{a-b}.$$

Però, date le espressioni $2\cdot\sqrt{3}$ e $5\cdot\sqrt{3}$, si possono eseguire l'addizione o la sottrazione raccogliendo a fattore comune $\sqrt{3}$:

$$2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=(2+5)\sqrt{3}=7\sqrt{3}$$
$$2\sqrt{3}-5\sqrt{3}=-3\sqrt{3}.$$

Si opera in analogia con quanto si farebbe con i monomi $2a$ e $5a$, ponendo $a=\sqrt{3}$:
$2a+5a=(2+5)a=7a$
$2a-5a=(2-5)a=-3a$.

DEFINIZIONE

Radicali simili

Due radicali irriducibili si dicono simili quando hanno lo stesso indice, lo stesso radicando e possono essere diversi solo per il fattore che li moltiplica, detto coefficiente del radicale.

ESEMPIO

$9\cdot\sqrt[5]{2}$ e $7\cdot\sqrt[5]{2}$ sono simili, perché i due radicali hanno lo stesso indice 5 e lo stesso radicando 2.

I radicali $5\cdot\sqrt[9]{2}$ e $5\cdot\sqrt[7]{2}$ non sono simili, perché le due radici hanno indici diversi, 9 e 7.

A volte due radicali possono essere trasformati in radicali simili portando fuori dalla radice alcuni fattori.

ESEMPIO

I radicali $b^2\cdot\sqrt{b^3}$ e $\sqrt{b^5}$, con $b\geq 0$, non sono simili.

Portiamo fuori radice i fattori:

$$b^2\cdot\sqrt{b^3}=b^2\cdot b\cdot\sqrt{b}=b^3\cdot\sqrt{b}; \qquad \sqrt{b^5}=b^2\cdot\sqrt{b}.$$

I radicali ottenuti $b^3\cdot\sqrt{b}$ e $b^2\cdot\sqrt{b}$ sono simili.

I radicali $a\cdot\sqrt[3]{b}$ e $a\cdot\sqrt[3]{b^2}$ non sono simili, perché le due radici hanno radicandi diversi, b e b^2.

Con radicali simili possiamo eseguire l'addizione o la sottrazione.

REGOLA

Somma algebrica di radicali simili

La somma algebrica di due o più radicali simili è il radicale, simile ai dati, che ha come coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

$$3\sqrt[\blacktriangle]{\blacksquare} + 2\sqrt[\blacktriangle]{\blacksquare} = 5\sqrt[\blacktriangle]{\blacksquare}$$

ESEMPIO

1. $4\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{a} = 6\sqrt[3]{a}$ (con $a \geq 0$).
2. $a\sqrt{2} + \sqrt{2} = (a+1)\sqrt{2}$.

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Espressioni a confronto

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

È maggiore $\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{12}$ o $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{10}$?

FRANCESCO: «Nessuna delle due: sono uguali! Ho fatto il calcolo approssimato, sapendo che $\sqrt{3}$ è circa 1,7 e $\sqrt{2}$ è circa 1,4: entrambe le espressioni danno 0,3».

CHIARA: «Forse hai usato un'approssimazione eccessiva. Inoltre, anche se due espressioni hanno lo stesso valore approssimato con un numero grande di cifre, non è detto che siano uguali. Posso farti degli esempi».

FRANCESCO: «Giusto. E poi, perché tanti calcoli? Usiamo l'algebra!».

▶ Per il confronto, utilizza le regole sui radicali e quelle sulle disuguaglianze.

8. La razionalizzazione del denominatore di una frazione

Razionalizzare il denominatore di una frazione significa trasformare la frazione in una equivalente che non ha radicali a denominatore. Ciò risulta utile, per esempio, nella somma di frazioni.

Per razionalizzare il denominatore di una frazione si applica la proprietà invariantiva delle frazioni, moltiplicando numeratore e denominatore per uno stesso fattore diverso da 0. Esaminiamo i casi più comuni.

1. Il denominatore è un unico radicale

ESEMPIO

Se il denominatore contiene un radicale quadratico, basta moltiplicare numeratore e denominatore per il radicale stesso.

$$\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3 \cdot \sqrt{2}.$$

Il risultato $3 \cdot \sqrt{2}$ non contiene radicali al denominatore.

> $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2.$

In generale, supposto $a > 0$, se il radicale al denominatore non è quadratico, si razionalizza nel seguente modo:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+(n-m)}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}.$$

ESEMPIO

$$\frac{21}{\sqrt[5]{49}} = \frac{21}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{21}{\sqrt[5]{7^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^3}} = \frac{21\sqrt[5]{7^3}}{7} = 3\sqrt[5]{7^3}.$$

2. Il denominatore è la somma o la differenza di due termini, dei quali almeno uno è un radicale quadratico

ESEMPIO

$$\frac{8}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}.$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore per la differenza $\sqrt{7} - \sqrt{2}$, in modo da applicare il prodotto notevole $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$$\frac{8}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{8(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{8(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{5}.$$

> Se al denominatore c'è una differenza, dobbiamo invece moltiplicare per la somma dei due termini.

> Si può ricorrere ai prodotti notevoli anche in altri casi. Per esempio, se a denominatore compare una somma o differenza di due radicali cubici, sfruttiamo la relazione:
> $(a^3 \pm b^3) =$
> $= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

9. I radicali quadratici doppi

Si chiama **radicale quadratico doppio** un'espressione del tipo:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \quad \text{oppure} \quad \sqrt{a-\sqrt{b}}\,.$$

Un radicale doppio può essere trasformato nella somma o nella differenza di due radicali semplici solo quando l'espressione $a^2 - b$ è il quadrato di un numero razionale o di un'espressione che non contiene radicali.

In tal caso valgono le due uguaglianze che consideriamo di seguito, in cui $a, b, a^2 - b \geq 0$.

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Il radicale doppio

$$\sqrt{3+\sqrt{2}}$$

non è trasformabile in una somma o differenza di radicali semplici, in quanto $3^2 - 2 = 7$ non è il quadrato di un razionale.

ESEMPIO

Trasformiamo il radicale doppio $\sqrt{8-\sqrt{15}}$ nella differenza fra due radicali semplici.
Ciò è possibile poiché $8^2 - 15 = 64 - 15 = 49 = 7^2$.

$$\sqrt{8-\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{8+\sqrt{49}}{2}} - \sqrt{\frac{8-\sqrt{49}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8+7}{2}} - \sqrt{\frac{8-7}{2}} = \sqrt{\frac{15}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

10. Le equazioni, i sistemi e le disequazioni con coefficienti irrazionali

Le proprietà finora esaminate vengono utilizzate anche quando si risolvono equazioni, sistemi e disequazioni con coefficienti irrazionali.

ESEMPIO

1. Risolviamo l'equazione

$$(\sqrt{2}+1)(x+1) = 2(2-x).$$

Svolgiamo i calcoli:

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2} + x + 1 = 4 - 2x.$$

Portiamo i termini con l'incognita al primo membro, gli altri al secondo:

$$\sqrt{2}x + x + 2x = 4 - \sqrt{2} - 1.$$

Sommiamo i termini simili:

$$3x + \sqrt{2}x = 3 - \sqrt{2}.$$

Raccogliamo l'incognita x:

$$(3+\sqrt{2})x = 3 - \sqrt{2}.$$

Dividiamo per $3+\sqrt{2}$:

$$\frac{\cancel{(3+\sqrt{2})}x}{\cancel{3+\sqrt{2}}} = \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}.$$

Razionalizziamo il denominatore:

$$x=\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\cdot\frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{(3-\sqrt{2})^2}{9-2}=\frac{9+2-6\sqrt{2}}{7}=\frac{11-6\sqrt{2}}{7}.$$

La soluzione è $x=\dfrac{11-6\sqrt{2}}{7}$.

2. Risolviamo la disequazione

$$\frac{3\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{6}}>\frac{5\sqrt{6}x}{2}.$$

Tenuto conto che $\sqrt{6}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$, il m.c.m. dei denominatori è $2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$; moltiplichiamo tutti i termini per $2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$:

$$\frac{3\sqrt{2}x}{\cancel{\sqrt{3}}}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{3}}-\frac{2}{\cancel{\sqrt{6}}}\cdot 2\cancel{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}>\frac{5\sqrt{6}x}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}.$$

Eseguiamo i calcoli:

$$12x-4>30x \quad\to\quad 12x-30x>4 \quad\to\quad -18x>4 \quad\to$$

$$\to\quad +\frac{18}{18}x<-\frac{4}{18} \quad\to\quad x<-\frac{2}{9}.$$

11. Le potenze con esponente razionale

È possibile scrivere i radicali in una forma diversa, che permette di estendere il concetto di potenza al caso in cui l'esponente sia un numero razionale.

DEFINIZIONE

Potenza con esponente razionale

La potenza con esponente razionale $\frac{m}{n}$ di un numero reale a, *positivo o nullo*, è la radice n-esima di a^m.

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \qquad (a\geq 0)$$

Nel caso in cui sia $m<0$, supponiamo $a>0$.

ESEMPIO

1. $5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$;
2. $2^{-\frac{4}{5}}=\sqrt[5]{2^{-4}}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\sqrt[5]{\frac{1}{16}}$
3. $(-4)^{\frac{1}{2}}$ non ha significato, perché nella definizione sono escluse le potenze di numeri negativi.

$1^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{1}=1$;

$0^{\frac{3}{2}}=\sqrt{0^3}=0$.

La definizione data permette di estendere alle potenze con esponente razionale le proprietà delle potenze con esponente intero, che ricordiamo nella tabella qui sotto.

PROPRIETÀ	ESPRESSIONE	CON
1. Prodotto di potenze di ugual base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	
2. Quoziente di potenze di ugual base	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$a \neq 0$
3. Potenza di una potenza	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	
4. Prodotto di potenze di ugual esponente	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	
5. Quoziente di potenze di ugual esponente	$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$	$b \neq 0$
6. Segno di una potenza	$(-a)^d = -a^d$ $(+a)^d = +a^d$ $(\pm a)^p = +a^p$	d numero dispari d numero dispari p numero pari
7. Potenza con base frazionaria ed esponente negativo	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}$	$a \neq 0 \wedge b \neq 0$ $n > 0$

Le proprietà delle potenze con esponente razionale possono essere dimostrate mediante le proprietà dei radicali. Per esempio, dimostriamo che:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Infatti:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}} =$$

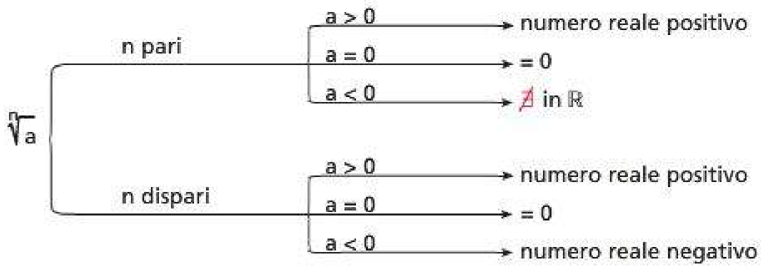
$$= \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Nelle espressioni irrazionali, invece di operare con i radicali, possiamo operare con le potenze.

ESEMPI DI ESPRESSIONI IRRAZIONALI	SEMPLIFICAZIONE	ADDIZIONE	POTENZA
con i radicali	$\sqrt[12]{7^8} = \sqrt[12:4]{7^{8:4}} = \sqrt[3]{7^2}$	$2\sqrt[3]{a^2} + 5\sqrt[3]{a^2} = (2+5)\sqrt[3]{a^2} = 7\sqrt[3]{a^2}$	$(\sqrt[7]{a^3})^2 = \sqrt[7]{(a^3)^2} = \sqrt[7]{a^6}$
con le potenze	$7^{\frac{8}{12}} = 7^{\frac{8:4}{12:4}} = 7^{\frac{2}{3}}$	$2a^{\frac{2}{3}} + 5a^{\frac{2}{3}} = (2+5)a^{\frac{2}{3}} = 7a^{\frac{2}{3}}$	$(a^{\frac{3}{7}})^2 = a^{\frac{3}{7}\cdot 2} = a^{\frac{6}{7}}$

12. I radicali in $\mathbb{R}$

Riprendiamo lo studio dei radicali in $\mathbb{R}$. Se il radicando è positivo o nullo, non ci sono variazioni rispetto a quello che abbiamo finora studiato. Partendo dalla definizione data nel paragrafo 3, considereremo il concetto di radicale anche nel caso di radicando negativo.
Il seguente diagramma fornisce una sintesi sulla radice n-esima di un numero reale a.



Alcuni esempi:
$\sqrt[6]{64} = 2$;
$\sqrt[8]{0} = 0$;
$\sqrt[4]{-81}$ non esiste;
$\sqrt[3]{27} = 3$;
$\sqrt[7]{0} = 0$;
$\sqrt[5]{-32} = -2$

Le condizioni di esistenza dei radicali in $\mathbb{R}$

Dal diagramma precedente puoi notare che una radice con indice dispari esiste qualunque sia il radicando, mentre una radice con indice pari esiste solo se il radicando è positivo o nullo.
In questo caso, se il radicando è un'espressione letterale, dobbiamo porre le relative condizioni di esistenza.

ESEMPIO

Troviamo le condizioni di esistenza in $\mathbb{R}$ del radicale $\sqrt[4]{1-2x}$.
Essendo l'indice pari, la condizione di esistenza è:

$$1-2x \geq 0, \text{ ossia C.E.: } x \leq \frac{1}{2}.$$

Per il radicale $\sqrt[3]{x+8}$, essendo l'indice dispari, non ci sono condizioni, ossia C.E.: $\forall x \in \mathbb{R}$.

La proprietà invariantiva

In generale, la proprietà invariantiva non vale per le radici con radicando negativo.
Per esempio, dato il radicale $\sqrt[3]{-8}$, **non** possiamo scrivere

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3\cdot 2]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Possiamo però trasformare il radicale iniziale in uno a esso equivalente, ma con il radicando positivo, e di seguito applicare la proprietà invariantiva. Se n è **dispari** e a un numero reale positivo, vale la relazione:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}.$$

Applicando questa proprietà al radicale considerato, si ha:

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}.$$

A questo punto possiamo applicare la proprietà invariantiva:

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -\sqrt[3\cdot 2]{8^2} = -\sqrt[6]{64} = -2.$$

La semplificazione e il valore assoluto

Per semplificare una radice con radicando scomponibile in fattori negativi basta introdurre il valore assoluto quando l'indice della radice è pari. Quando l'indice è dispari si procede al solito modo.

ESEMPIO

1. $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.
2. $\sqrt[12]{(-3)^{10}} = \sqrt[12:2]{(-3)^{10:2}} = \sqrt[6]{|-3|^5}$.
3. $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$.

In generale, valgono le seguenti uguaglianze:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{se } n \text{ è dispari} \\ |a| & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

La riduzione di radicali allo stesso indice

La proprietà invariantiva permette di ridurre due o più radicali allo stesso indice.

ESEMPIO Riduciamo al minimo comune indice i seguenti radicali:

$$\sqrt[3]{-a^2-1}; \qquad \sqrt{a^4+1}.$$

a) Trasformiamo il primo radicale, rendendo positivo il radicando:

$$\sqrt[3]{-a^2-1} = \sqrt[3]{-(a^2+1)} = -\sqrt[3]{a^2+1};$$

b) m.c.m. (3; 2) = 6;

c) eleviamo ogni radicando al quoziente fra il m.c.m. e l'indice:

$$-\sqrt[3]{a^2+1} = -\sqrt[6]{(a^2+1)^2};$$

$$\sqrt{a^4+1} = \sqrt[6]{(a^4+1)^3}.$$

Per le operazioni di moltiplicazione, divisione, addizione, sottrazione e l'elevamento a potenza valgono per i radicali in $\mathbb{R}$ le stesse proprietà incontrate nei paragrafi precedenti per i radicali in $\mathbb{R}_0^+$.

Nel sito: ▶ teoria e 25 esercizi su I numeri immaginari