

LA TEORIA IN SINTESI

I numeri reali e i radicali

1. La necessità di ampliare l'insieme \mathbb{Q}

La **radice quadrata** di un numero è quel numero *positivo* o *nullo* che, elevato al quadrato, dà come risultato il numero dato.

L'estrazione di radice non è un'operazione interna in \mathbb{Q} .

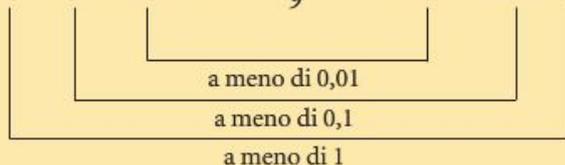
Per esempio, 2 non ha per radice quadrata un numero razionale.

2. Dai numeri razionali ai numeri reali

Ogni numero razionale può essere **approssimato** mediante due successioni di numeri decimali: una che lo approssima per eccesso, l'altra che lo approssima per difetto.

ESEMPIO

$$0 < 0,2 < 0,22 < \dots < \frac{2}{9} < \dots < 0,23 < 0,3 < 1$$



I numeri **irrazionali** sono numeri decimali illimitati non periodici. Possono essere approssimati per difetto e per eccesso da due successioni di decimali.

I numeri **reali** sono tutti i numeri razionali e irrazionali.

L'insieme \mathbb{R} è **denso**, cioè fra due numeri reali a e b esiste sempre un altro numero reale, e quindi ne esistono infiniti; inoltre \mathbb{R} è **completo**, cioè a ogni numero reale corrisponde un punto della retta e viceversa.

3. I radicali

Dati un numero reale a e un numero naturale n diverso da 0:

- se a è positivo o nullo la **radice n -esima** di a è quel numero reale b , anch'esso non negativo, la cui potenza con esponente n è uguale ad a ;

naturale diverso da 0

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

reali maggiori o uguali a 0

- se a è negativo e n è dispari, la **radice n -esima** di a è quel numero reale b negativo la cui potenza con esponente n è uguale ad a ;

naturale dispari

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

reali minori di 0

- se a è negativo e n è pari, non esiste la **radice n -esima** di a .

naturale pari

$$\sqrt[n]{a} \text{ non esiste}$$

reale minore di 0

Dalla definizione di radice n -esima si deduce la seguente proprietà: dati un numero reale a positivo o nullo e un numero naturale n pari, oppure un numero reale a e un numero n dispari, la radice n -esima del numero a , elevata alla n , dà come risultato il numero a .

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

con a maggiore o uguale a 0 e n pari
o con a reale e n dispari

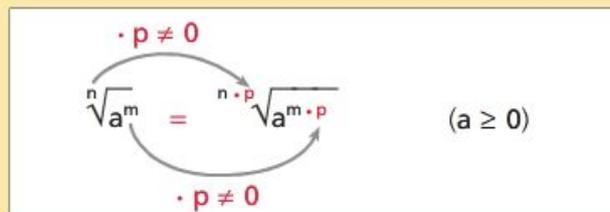
Al simbolo $\sqrt[n]{a}$, con $a \geq 0$, si dà il nome di **radicale con indice n** . I radicali con indice 2 si chiamano **radicali quadratici**, quelli con indice 3 **radicali cubici**.



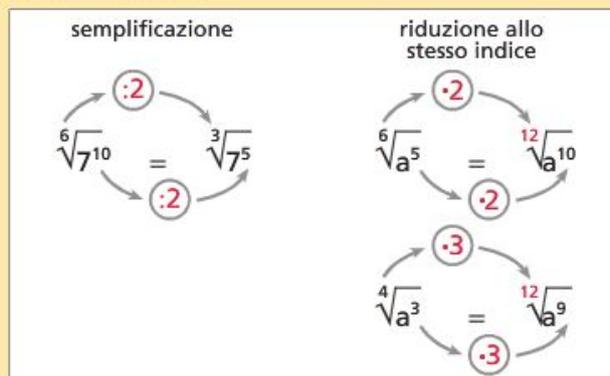
4. I radicali in \mathbb{R}_0^+

Limitando lo studio ai radicali in \mathbb{R}_0^+ , nell'espressione $\sqrt[n]{a}$ il radicando deve essere un numero positivo o nullo indipendentemente dall'indice di radice.

Proprietà invariante dei radicali: dato un radicale, moltiplicando l'indice del radicale e l'esponente del radicando per uno stesso numero naturale diverso da 0, si ottiene un radicale equivalente. È possibile ottenere un radicale equivalente anche dividendo indice ed esponente per un loro divisore comune.



Applicando la proprietà invariante è possibile **semplificare** un radicale oppure **ridurre allo stesso indice** più radicali.



Nella semplificazione, se il radicando è letterale e non se ne conosce il segno, occorre scrivere il radicando in valore assoluto.

ESEMPIO

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad \sqrt[n]{a^n} = |a|.$$

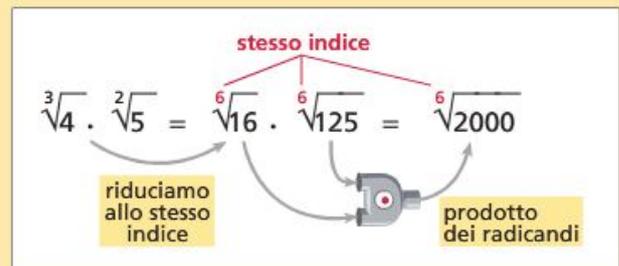
5. La moltiplicazione e la divisione fra radicali

Il **prodotto** di due radicali con lo stesso indice è un radicale che ha lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi.

ESEMPIO

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{21}.$$

Se i radicali hanno indice diverso, per moltiplicarli è sufficiente ridurli al loro minimo comune indice.

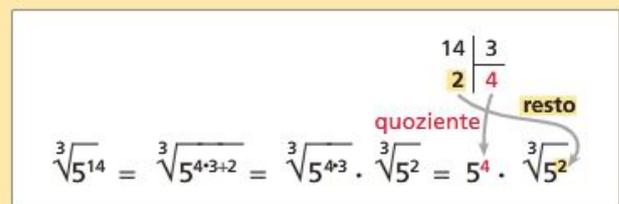


Considerazioni analoghe valgono per il **quoziente** di radicali.

ESEMPIO

$$\begin{aligned} \sqrt{2^4} : \sqrt[3]{2^3} &= \sqrt[10]{(2^4)^5} : \sqrt[10]{(2^3)^2} = \\ &= \sqrt[10]{2^{20}} : 2^6 = \sqrt[10]{2^{14}} = \sqrt[5]{2^7}. \end{aligned}$$

Un **fattore del radicando**, scritto sotto forma di **potenza con base non negativa**, può essere **portato fuori dal segno di radice**, se il suo esponente m è maggiore o uguale all'indice n della radice. Il fattore esterno ha per esponente il quoziente della divisione fra m e n , quello interno ha per esponente il resto della divisione.



6. La potenza e la radice di un radicale

La **potenza** m -esima di un radicale è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando la potenza m -esima del radicando.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad (\sqrt[7]{3^2})^4 = \sqrt[7]{(3^2)^4} = \sqrt[7]{3^8}$$

La **radice** m -esima di un radicale di indice n è un radicale che ha per indice il prodotto degli indici $m \cdot n$ e per radicando lo stesso radicando.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad \sqrt[7]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[21]{2}$$

prodotto degli indici

Un **fattore non negativo** può essere **portato dentro il segno di radice**, diventando fattore del radicando, se lo si eleva alla potenza che ha per esponente l'indice del radicale.

ESEMPIO

$$5\sqrt{3} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$$

7. L'addizione e la sottrazione di radicali

Due radicali irriducibili sono **simili** se hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.

La **somma di due radicali simili** è un radicale simile ai radicali dati avente per coefficiente la somma dei loro coefficienti.

$$4\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$$

radicali simili radicale simile ai radicali dati

somma algebrica dei coefficienti

8. La razionalizzazione del denominatore di una frazione

È possibile **razionalizzare il denominatore** (in cui compaiono radicali) di una frazione, moltiplicando numeratore e denominatore per un opportuno fattore diverso da 0.

ESEMPIO

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

9. I radicali quadratici doppi

Il **radicale doppio** $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ può essere trasformato nella somma algebrica di due radicali semplici solo se $a^2 - b$ è il quadrato di un numero razionale o di un'espressione che non contiene radicali.

$$\begin{aligned} \sqrt{a \pm \sqrt{b}} &= \\ &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \end{aligned}$$

con $a, b, a^2 - b \geq 0$.

10. Le equazioni, i sistemi e le disequazioni con coefficienti irrazionali

È possibile risolvere equazioni, sistemi e disequazioni a coefficienti irrazionali.

ESEMPIO

$$\sqrt{2}x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

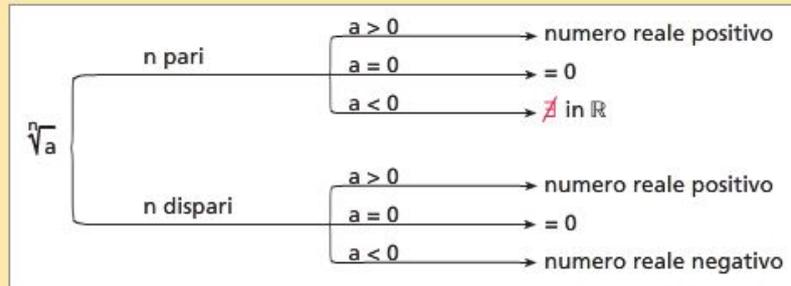
11. Le potenze con esponente razionale

È possibile scrivere i radicali sotto forma di **potenze con esponenti razionali**.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geq 0) \quad 7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$$

12. I radicali in \mathbb{R}

Dati un numero reale a e un numero naturale n diverso da 0, è possibile calcolare la radice n -esima di a secondo il seguente schema:



1. La necessità di ampliare l'insieme \mathbb{Q}



Teoria a pag. 773

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 VERO O FALSO?

- a) Ogni numero razionale ammette sempre due radici quadrate. V F
- b) \sqrt{a} , con a razionale positivo, indica due numeri, uno positivo e uno negativo. V F
- c) La radice quadrata di 0 è uguale a 0. V F
- d) Nessun numero razionale ha come quadrato $\frac{4}{3}$. V F
- e) La radice quadrata di ogni numero $a \in \mathbb{Q}_0^+$ non appartiene all'insieme \mathbb{Q}_0^+ . V F
- f) A ogni numero razionale corrisponde un punto della retta e viceversa. V F

2 Dati i tre numeri $\sqrt{1}$, $\sqrt{\frac{49}{81}}$ e $\sqrt{8}$, solo i primi due appartengono all'insieme \mathbb{Q}_0^+ . Perché?

3 Perché è necessario ampliare l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali?

4 Le scritte $\sqrt{-4}$ e $\sqrt{5}$ sono entrambe prive di significato? Motiva la risposta.

ESERCIZI

5 Con considerazioni analoghe a quelle fatte per $\sqrt{2}$, dimostra che $\sqrt{3}$ non è un numero razionale.

6 Come nell'esercizio precedente, ma per $\sqrt{5}$.

7 Come nell'esercizio precedente, ma per $\sqrt{6}$.

8 Utilizzando il teorema di Pitagora costruisci i segmenti di lunghezza (in centimetri) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$.