# LA TEORIA IN SINTESI
# I numeri reali e i radicali

## 1. La necessità di ampliare l'insieme $\mathbb{Q}$

La **radice quadrata** di un numero è quel numero *positivo* o *nullo* che, elevato al quadrato, dà come risultato il numero dato.
L'estrazione di radice non è un'operazione interna in $\mathbb{Q}$.
Per esempio, 2 non ha per radice quadrata un numero razionale.

## 2. Dai numeri razionali ai numeri reali

Ogni numero razionale può essere **approssimato** mediante due successioni di numeri decimali: una che lo approssima per eccesso, l'altra che lo approssima per difetto.

**ESEMPIO**

$$0 < 0{,}2 < 0{,}22 < \ldots < \frac{2}{9} < \ldots < 0{,}23 < 0{,}3 < 1$$

a meno di 0,01

a meno di 0,1

a meno di 1

I numeri **irrazionali** sono numeri decimali illimitati non periodici. Possono essere approssimati per difetto e per eccesso da due successioni di decimali.

I numeri **reali** sono tutti i numeri razionali e irrazionali.

L'insieme $\mathbb{R}$ è **denso**, cioè fra due numeri reali $a$ e $b$ esiste sempre un altro numero reale, e quindi ne esistono infiniti; inoltre $\mathbb{R}$ è **completo**, cioè a ogni numero reale corrisponde un punto della retta e viceversa.

## 3. I radicali

Dati un numero reale $a$ e un numero naturale $n$ diverso da 0:

- se $a$ è positivo o nullo la **radice *n*-esima** di $a$ è quel numero reale $b$, anch'esso non negativo, la cui potenza con esponente $n$ è uguale ad $a$;

naturale diverso da 0

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

reali maggiori o uguali a 0

- se $a$ è negativo e $n$ è dispari, la **radice *n*-esima** di $a$ è quel numero reale $b$ negativo la cui potenza con esponente $n$ è uguale ad $a$;

naturale dispari

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

reali minori di 0

- se $a$ è negativo e $n$ è pari, non esiste la **radice *n*-esima** di $a$.

naturale pari

$\sqrt[n]{a}$ non esiste

reale minore di 0

Dalla definizione di radice $n$-esima si deduce la seguente proprietà: dati un numero reale $a$ positivo o nullo e un numero naturale $n$ pari, oppure un numero reale $a$ e un numero $n$ dispari, la radice $n$-esima del numero $a$, elevata alla $n$, dà come risultato il numero $a$.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

con $a$ maggiore o uguale a 0 e $n$ pari
o con $a$ reale e $n$ dispari

Al simbolo $\sqrt[n]{a}$, con $a \geq 0$, si dà il nome di **radicale con indice *n***. I radicali con indice 2 si chiamano **radicali quadratici**, quelli con indice 3 **radicali cubici**.

indice

$$\sqrt[4]{3^5}$$

esponente del radicando

radicando

## 4. I radicali in $\mathbb{R}_0^+$

Limitando lo studio ai radicali in $\mathbb{R}_0^+$, nell'espressione $\sqrt[n]{a}$ il radicando deve essere un numero positivo o nullo indipendentemente dall'indice di radice.

**Proprietà invariantiva dei radicali**: dato un radicale, moltiplicando l'indice del radicale e l'esponente del radicando per uno stesso numero naturale diverso da 0, si ottiene un radicale equivalente. È possibile ottenere un radicale equivalente anche dividendo indice ed esponente per un loro divisore comune.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} \qquad (a \geq 0)$$

$\cdot\, p \neq 0$

Applicando la proprietà invariantiva è possibile **semplificare** un radicale oppure **ridurre allo stesso indice** più radicali.

semplificazione

$$\sqrt[6]{7^{10}} \underset{:2}{=} \sqrt[3]{7^5}$$

riduzione allo stesso indice

$$\sqrt[6]{a^5} \underset{\cdot 2}{=} \sqrt[12]{a^{10}}$$

$$\sqrt[4]{a^3} \underset{\cdot 3}{=} \sqrt[12]{a^9}$$

Nella semplificazione, se il radicando è letterale e non se ne conosce il segno, occorre scrivere il radicando in valore assoluto.

**ESEMPIO**

$$\sqrt{a^2} = |a|, \qquad \sqrt[n]{a^n} = |a|.$$

## 5. La moltiplicazione e la divisione fra radicali

Il **prodotto** di due radicali con lo stesso indice è un radicale che ha lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi.

**ESEMPIO**

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{21}.$$

Se i radicali hanno indice diverso, per moltiplicarli è sufficiente ridurli al loro minimo comune indice.

stesso indice

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[2]{5} = \sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{2000}$$

riduciamo allo stesso indice

prodotto dei radicandi

Considerazioni analoghe valgono per il **quoziente** di radicali.

**ESEMPIO**

$$\sqrt{2^4} : \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[10]{(2^4)^5} : \sqrt[10]{(2^3)^2} =$$
$$= \sqrt[10]{2^{20} : 2^6} = \sqrt[10]{2^{14}} = \sqrt[5]{2^7}.$$

Un **fattore del radicando**, scritto sotto forma di **potenza con base non negativa**, può essere **portato fuori dal segno di radice**, se il suo esponente $m$ è maggiore o uguale all'indice $n$ della radice. Il fattore esterno ha per esponente il quoziente della divisione fra $m$ e $n$, quello interno ha per esponente il resto della divisione.

| 14 | 3 |
|---|---|
| 2 | 4 |

quoziente

resto

$$\sqrt[3]{5^{14}} = \sqrt[3]{5^{4\cdot 3+2}} = \sqrt[3]{5^{4\cdot 3}} \cdot \sqrt[3]{5^2} = 5^4 \cdot \sqrt[3]{5^2}$$

## 6. La potenza e la radice di un radicale

La **potenza** $m$-esima di un radicale è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando la potenza $m$-esima del radicando.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \left(\sqrt[7]{3^2}\right)^4 = \sqrt[7]{(3^2)^4} = \sqrt[7]{3^8}$$

La **radice** $m$-esima di un radicale di indice $n$ è un radicale che ha per indice il prodotto degli indici $m \cdot n$ e per radicando lo stesso radicando.

prodotto degli indici

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \qquad \sqrt[7]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[21]{2}$$

Un **fattore non negativo** può essere **portato dentro il segno di radice**, diventando fattore del radicando, se lo si eleva alla potenza che ha per esponente l'indice del radicale.

**ESEMPIO**

$$5\sqrt{3} = \sqrt[2]{5^2} \cdot \sqrt[2]{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}.$$

## 7. L'addizione e la sottrazione di radicali

Due radicali irriducibili sono **simili** se hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.
La **somma di due radicali simili** è un radicale simile ai radicali dati avente per coefficiente la somma dei loro coefficienti.

radicali simili

radicale simile ai radicali dati

$$4\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$$

somma algebrica dei coefficienti

## 8. La razionalizzazione del denominatore di una frazione

È possibile **razionalizzare il denominatore** (in cui compaiono radicali) di una frazione, moltiplicando numeratore e denominatore per un opportuno fattore diverso da 0.

**ESEMPIO**

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

## 9. I radicali quadratici doppi

Il **radicale doppio** $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ può essere trasformato nella somma algebrica di due radicali semplici solo se $\boldsymbol{a^2 - b}$ è il quadrato di un numero razionale o di un'espressione che non contiene radicali.

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

con $a, b, a^2 - b \geq 0$.

## 10. Le equazioni, i sistemi e le disequazioni con coefficienti irrazionali

È possibile risolvere equazioni, sistemi e disequazioni a coefficienti irrazionali.

**ESEMPIO**

$$\sqrt{2}x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

## 11. Le potenze con esponente razionale

È possibile scrivere i radicali sotto forma di **potenze con esponenti razionali**.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \ (a \geq 0) \qquad 7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$$

## 12. I radicali in $\mathbb{R}$

Dati un numero reale $a$ e un numero naturale $n$ diverso da 0, è possibile calcolare la radice $n$-esima di $a$ secondo il seguente schema:

$\sqrt[n]{a}$
- n pari
  - $a > 0$ → numero reale positivo
  - $a = 0$ → $= 0$
  - $a < 0$ → $\nexists$ in $\mathbb{R}$
- n dispari
  - $a > 0$ → numero reale positivo
  - $a = 0$ → $= 0$
  - $a < 0$ → numero reale negativo

# 1. La necessità di ampliare l'insieme $\mathbb{Q}$

→ Teoria a pag. 773

### RIFLETTI SULLA TEORIA

**1** VERO O FALSO?

a) Ogni numero razionale ammette sempre due radici quadrate. V F

b) $\sqrt{a}$, con $a$ razionale positivo, indica due numeri, uno positivo e uno negativo. V F

c) La radice quadrata di 0 è uguale a 0. V F

d) Nessun numero razionale ha come quadrato $\frac{4}{3}$. V F

e) La radice quadrata di ogni numero $a \in \mathbb{Q}_0^+$ non appartiene all'insieme $\mathbb{Q}_0^+$. V F

f) A ogni numero razionale corrisponde un punto della retta e viceversa. V F

**2** Dati i tre numeri $\sqrt{1}$, $\sqrt{\frac{49}{81}}$ e $\sqrt{8}$, solo i primi due appartengono all'insieme $\mathbb{Q}_0^+$. Perché?

**3** Perché è necessario ampliare l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali?

**4** Le scritture $\sqrt{-4}$ e $\sqrt{5}$ sono entrambe prive di significato? Motiva la risposta.

### ESERCIZI

**5** Con considerazioni analoghe a quelle fatte per $\sqrt{2}$, dimostra che $\sqrt{3}$ non è un numero razionale.

**6** Come nell'esercizio precedente, ma per $\sqrt{5}$.

**7** Come nell'esercizio precedente, ma per $\sqrt{6}$.

**8** Utilizzando il teorema di Pitagora costruisci i segmenti di lunghezza (in centimetri) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$.