1 Il lavoro come prodotto scalare

Nella vita di ogni giorno il termine "lavoro" viene usato per indicare uno sforzo che può essere muscolare o mentale. Così, compie lavoro un giardiniere che spinge un tosaerba oppure un ragazzo che studia [▶1].

In fisica viene compiuto un lavoro ogni volta che una forza, come quella esercitata dal giardiniere per spingere, è applicata a un oggetto, come il tosaerba, che si sposta nella direzione della forza.

Il lavoro compiuto durante lo studio è il risultato di eventi microscopici che coinvolgono molecole, ioni ed elettroni e che ugualmente consistono in spostamenti causati da forze.

Figura 1 Nel significato comune del termine, si definisce "lavoro" sia l'azione di un giardiniere che tosa l'erba sia quella di un ragazzo che si dedica allo studio.

In fisica si parla di **lavoro** quando ci sono in gioco forze che producono o ostacolano spostamenti. Il giardiniere che spinge il tosaerba compie lavoro perché applica una forza muscolare il cui punto di applicazione si sposta nella direzione del moto dell'attrezzo. Il lavoro svolto nello studio è il risultato dell'azione di tutte le forze che spostano molecole, ioni ed elettroni attraverso le masse cellulari.

Il lavoro L compiuto da una forza su un corpo è una grandezza *scalare* definita in funzione di due grandezze vettoriali: la forza $\vec{F}$ e lo spostamento $\vec{s}$ del corpo. L'operazione tra vettori che restituisce uno scalare si chiama prodotto scalare.

Il prodotto scalare

mat

Consideriamo due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e chiamiamo α l'angolo formato dalle loro direzioni.

Prodotto scalare

Il prodotto scalare fra $\vec{a}$ e $\vec{b}$, che indichiamo con $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (leggi: "a scalare b"), è una grandezza *scalare* definita come il prodotto dei moduli a e b dei due vettori per il coseno dell'angolo α fra essi compreso:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b \cos \alpha$$

Il prodotto scalare è positivo o negativo a seconda che l'angolo α sia minore o maggiore di 90°. È inoltre uguale a zero se è $\alpha = 90°$. In altri termini, *se due vettori sono perpendicolari il loro prodotto scalare è nullo.*

Nella figura sono rappresentati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ con origine nello stesso punto O. La perpendicolare a $\vec{b}$ passante per il secondo estremo A di $\vec{a}$ individua lungo la direzione di $\vec{b}$ il punto A': il modulo del vettore $\overrightarrow{OA'}$, preceduto dal segno positivo o negativo a seconda che $\overrightarrow{OA'}$ punti nel verso di $\vec{b}$ o nel verso opposto, è la componente scalare $a_{//}$ di $\vec{a}$ lungo la direzione di $\vec{b}$, o *proiezione perpendicolare* di $\vec{a}$ su $\vec{b}$. Detto α l'angolo compreso fra $\vec{a}$ e $\vec{b}$, si ha:

$$a_{//} = a \cos \alpha$$

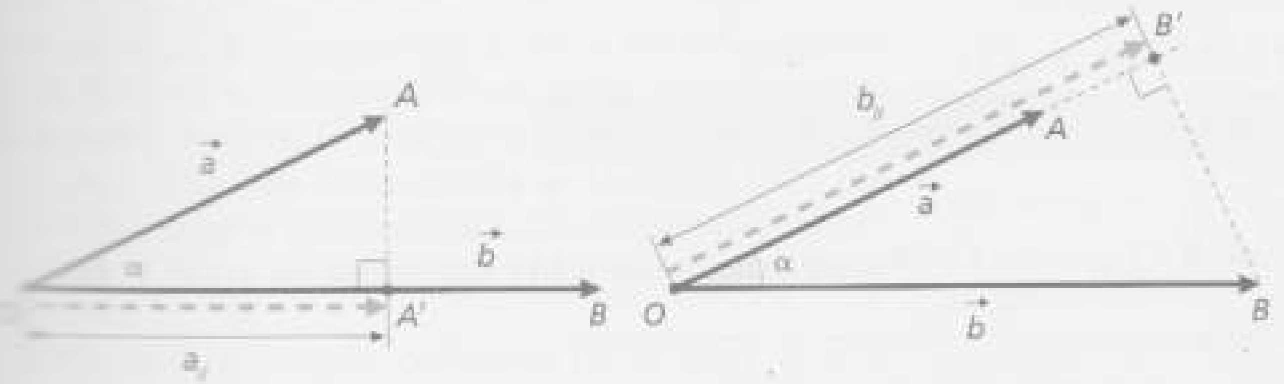
Allo stesso modo, la componente scalare $b_{//}$ di $\vec{b}$ lungo la direzione di $\vec{a}$, o proiezione perpendicolare di $\vec{b}$ su $\vec{a}$, è il modulo del vettore $\overrightarrow{OB'}$ preceduto dal segno positivo o negativo a seconda che $\overrightarrow{OB'}$ punti nel verso di $\vec{a}$ o nel verso opposto:

$$b_{//} = b \cos \alpha$$

Pertanto, il prodotto scalare di due vettori è uguale al prodotto della proiezione di un vettore sull'altro per il modulo di quest'ultimo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_{//}\, b = a\, b_{//}$$

Figura 2 Proiezione perpendicolare di un vettore su un altro.



La quantità $a_{//} = a \cos \alpha$ è la componente scalare del vettore $\vec{a}$ lungo la direzione di $\vec{b}$.

La quantità $b_{//} = b \cos \alpha$ è la componente scalare del vettore $\vec{b}$ lungo la direzione di $\vec{a}$.

Altre proprietà del prodotto scalare sono:
- la proprietà commutativa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- la proprietà distributiva rispetto alla somma: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

Il prodotto scalare si può esprimere usando le componenti cartesiane dei vettori. Dato un sistema cartesiano Oxy, i versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ degli assi, essendo due vettori di modulo uguale a 1 e mutuamente perpendicolari, obbediscono alle relazioni:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \qquad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$$

Dati due vettori $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ e $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ appartenenti a un piano cartesiano, si ha pertanto:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) = a_x b_x + a_y b_y$$

cioè il prodotto scalare fra i due vettori è uguale alla somma dei prodotti delle loro componenti x e y. ■

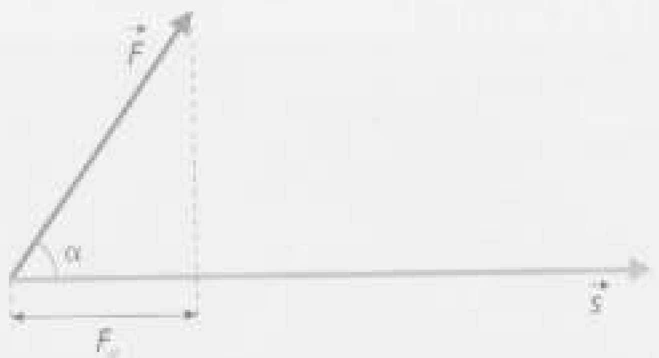
Il lavoro come prodotto scalare tra forza e spostamento

Fissati il modulo F della forza e il modulo s dello spostamento, il lavoro può essere negativo, nullo o positivo (compreso fra $-F s$ ed $F s$) a seconda dell'orientamento reciproco dei due vettori. Ciò che determina il lavoro di una forza su un corpo che compie un dato spostamento non è, infatti, l'intensità della forza, ma la proiezione perpendicolare della forza lungo la direzione dello spostamento.

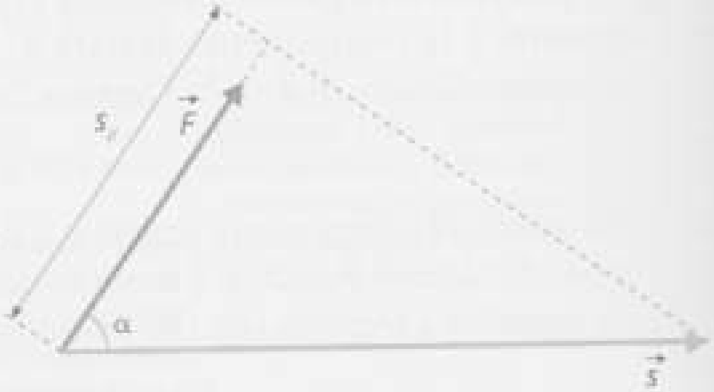
Dalla [▸3], determinando il lavoro come prodotto fra la componente scalare $F_{//}$ della forza lungo $\vec{s}$ e il modulo di $\vec{s}$, si nota che vale, in funzione dell'angolo α formato da $\vec{F}$ ed $\vec{s}$, l'espressione:

$$L = F s \cos \alpha$$

Figura 3 Il lavoro L può essere espresso in funzione dell'angolo α compreso fra la forza $\vec{F}$ e lo spostamento $\vec{s}$.



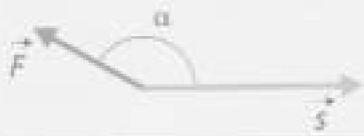
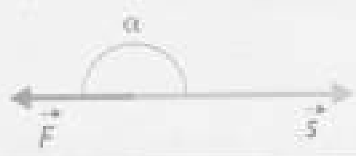
Essendo $F_{//} = F \cos \alpha$, si ricava $L = F_{//} s = F s \cos \alpha$



Essendo $s_{//} = s \cos \alpha$, ugualmente si ricava $L = F s_{//} = F s \cos \alpha$

La stessa espressione si ottiene anche determinando il lavoro come prodotto fra il modulo di $\vec{F}$ e la componente scalare $s_{//}$ dello spostamento lungo $\vec{F}$. Nella [Tab. 1] è illustrata, come rassegna dei diversi casi possibili, la dipendenza di L da α.

Tabella 1 Il lavoro al variare dell'angolo α fra $\vec{F}$ ed $\vec{s}$.

Angolo	Coseno	Lavoro $L = F s \cos \alpha$
$\alpha = 0$ 	$\cos 0 = 1$	$L = F s$
$0 < \alpha < 90°$ 	$1 > \cos \alpha > 0$	$L = F s \cos \alpha > 0$
$\alpha = 90°$ 	$\cos 90° = 0$	$L = 0$
$90° < \alpha < 180°$ 	$0 > \cos \alpha > -1$	$L = F s \cos \alpha < 0$
$\alpha = 180°$ 	$\cos \alpha = -1$	$L = -F s$

Il prodotto fra i moduli dei due vettori $\vec{F}$ ed $\vec{s}$ e il coseno dell'angolo fra essi compreso, è per definizione il prodotto scalare di $\vec{F}$ ed $\vec{s}$:

$$F s \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Siamo così giunti a una definizione più sintetica del lavoro.

Lavoro di una forza costante

Il lavoro di una forza costante $\vec{F}$ il cui punto di applicazione subisce uno spostamento $\vec{s}$ è il prodotto scalare fra la forza e lo spostamento:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

1 Le risposte della fisica All'aeroporto, con un trolley per bagaglio...

Una donna d'affari trascina il suo trolley dall'ingresso dell'aeroporto fino al banco del check-in, percorrendo uno spazio di 20 metri. La forza $\vec{F}$ con cui trascina il trolley è inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo α.

Immaginando di rappresentare la forza che la viaggiatrice esercita sul suo bagaglio in un piano cartesiano *Oxy* assegnato, la forza $\vec{F}$ avrà componenti F_x = 12,0 N e F_y = 35,0 N. Questa forza compie un lavoro di 370 J per spostare il proprio punto di applicazione (solidale col bagaglio che scorre sul pavimento, che immaginiamo privo di attrito) di 20,0 m.
Quanto misura l'angolo compreso fra la forza $\vec{F}$ e lo spostamento $\vec{s}$?

Dati e incognite

$F_x = 12{,}0$ N $\quad F_y = 35{,}0$ N $\quad L = 370$ J
$s = 20{,}00$ m $\quad \alpha = ?$

Soluzione

Il lavoro compiuto dalla forza F è, per definizione, la grandezza scalare

$$L = F\,s\cos\alpha.$$

Noto il lavoro compiuto dalla forza e lo spostamento che ha prodotto, calcoliamo il modulo di $\vec{F}$ dopo averne rappresentato le componenti sul piano *Oxy* assegnato.

Il modulo di $\vec{F}$ è

$$F = \sqrt{F_x + F_y}$$

per cui, sostituendo i valori numerici, abbiamo

$$F = \sqrt{(12{,}0\,\text{N})^2 + (35{,}0\,\text{N})^2} = 37{,}0\,\text{N}$$

Ora possiamo ricavare l'angolo α essendo

$$\cos\alpha = \frac{L}{F\cdot s} = \frac{370\,\text{J}}{37\,\text{N}\cdot 20{,}0\,\text{m}} = 0{,}50$$

da cui:

$$\alpha = 60°$$

Adesso tocca a te

Rielabora il contenuto del paragrafo rispondendo a voce a queste domande.

1. Immagina e descrivi una situazione in cui la forza di tensione in una corda compie lavoro positivo e una in cui compie lavoro negativo.
2. Prova a spiegare, aiutandoti con un disegno, perché la forza centripeta non compie lavoro.

Prova a risolvere il problema, poi verifica sul MEbook i passaggi svolti e commentati.

3. Fissato un sistema cartesiano *Oxy*, sono dati la forza $\vec{F}$ di componenti cartesiane F_x = 4,5 N, F_y = −3 N, e lo spostamento $\vec{s}$ del suo punto di applicazione di componenti cartesiane s_x = 1 m e s_y = 1,5 m. Esegui una rappresentazione grafica. Qual è il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$? [0]

2 Il lavoro di una forza costante: il caso della forza peso

Il lavoro compiuto da una forza $\vec{F}$ costante in modulo, direzione e verso quando il suo punto di applicazione subisce uno spostamento $\vec{s}$ è lo scalare:

$$L = s\,F_{//}$$

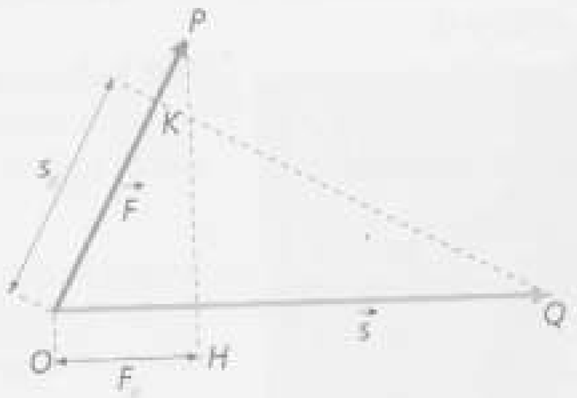
Il lavoro, cioè, è uguale al prodotto del modulo s dello spostamento per la componente $F_{//}$ della forza nella direzione dello spostamento.
Il lavoro può essere definito anche come $L = F s_{//}$, come prodotto dell'intensità F della forza per la componente $s_{//}$ dello spostamento nella direzione della forza.

Vediamo perché [1].

1 Come e perché

Calcolo del lavoro di una forza costante

Sono rappresentati, insieme con la forza costante $\vec{F}$ e lo spostamento $\vec{s}$ del suo punto di applicazione, la componente $F_{//} = \overline{OH}$ della forza secondo la direzione dello spostamento e la componente $s_{//} = \overline{OK}$ dello spostamento secondo la direzione della forza. Per la similitudine dei due triangoli rettangoli *OPH* e *OQK* possiamo scrivere la proporzione



$$\overline{OP} : \overline{OQ} = \overline{OH} : \overline{OK}$$

cioè $F : s = F_{//} : s_{//}$ da cui segue: $s\,F_{//} = F\,s_{//}$

Pertanto il lavoro della forza costante $\vec{F}$, definito come prodotto $s\,F_{//}$ del modulo dello spostamento per la componente della forza secondo la direzione dello spostamento, può essere calcolato anche come prodotto $F\,s_{//}$ dell'intensità della forza per la componente dello spostamento secondo la direzione della forza.

Dalla definizione data segue che il lavoro è [▸4]:

- positivo (detto anche **lavoro motore**) oppure negativo (detto anche **lavoro resistente**) a seconda che il vettore $\vec{F}_{//}$, componente della forza $\vec{F}$ nella direzione dello spostamento $\vec{s}$, abbia lo stesso verso di $\vec{s}$ o il suo opposto, cioè a seconda che i vettori $\vec{F}$ ed $\vec{s}$ formino un angolo acuto o ottuso;
- nullo se $\vec{F}$ ed $\vec{s}$ formano un angolo di 90°, essendo in tal caso $F_{//} = 0$ e $s_{//} = 0$ (per esempio il lavoro compiuto dalla forza centripeta, essendo perpendicolare allo spostamento, è nullo);
- uguale al prodotto $L = F\,s$ dell'intensità della forza per il modulo dello spostamento se $\vec{F}$ ed $\vec{s}$ sono due vettori paralleli, oppure allo stesso prodotto preceduto dal segno meno, $L = -F\,s$, se $\vec{F}$ ed $\vec{s}$ sono *antiparalleli*, cioè hanno la stessa direzione ma versi opposti.

Nel SI le dimensioni fisiche del lavoro sono

$$[L] = [F]\,[s] = [m]\,[l^2]\,[t^{-2}]$$

e la sua unità di misura è il **N · m**, chiamato anche **joule** (simbolo **J**), in onore del fisico inglese James Prescot Joule (1818-1889):

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{N \cdot m}$$

Il lavoro di 1 J è quello compiuto dalla forza costante di 1 N quando il suo punto di applicazione subisce lo spostamento di 1 m nella stessa direzione e nello stesso verso della forza.

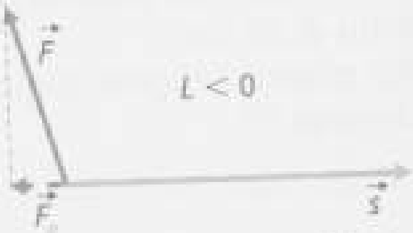
Per determinare il lavoro che una forza costante compie su un corpo è spesso utile fissare una coppia di assi cartesiani nel piano della forza e dello spostamento [▸5]. Se F_x ed F_y sono le componenti della forza rispetto agli assi, ed s_x ed s_y le componenti dello spostamento del corpo, utilizzando l'espressione cartesiana del prodotto scalare possiamo scrivere:

$$L = F_x s_x + F_y s_y$$

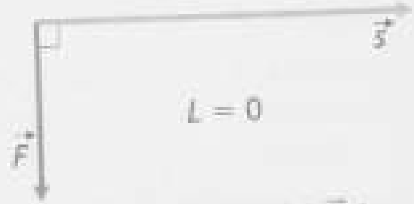
In questa espressione le componenti F_x, F_y, s_x ed s_y devono essere prese ciascuna con il proprio segno (nel caso illustrato in figura è $F_x > 0$, $F_y > 0$, $s_x > 0$ ed $s_y < 0$).

Figura 4 Il segno del lavoro.

Il lavoro è positivo perché il componente $\vec{F}_{//}$ di $\vec{F}$ secondo la direzione di $\vec{s}$ ha lo stesso verso di $\vec{s}$.

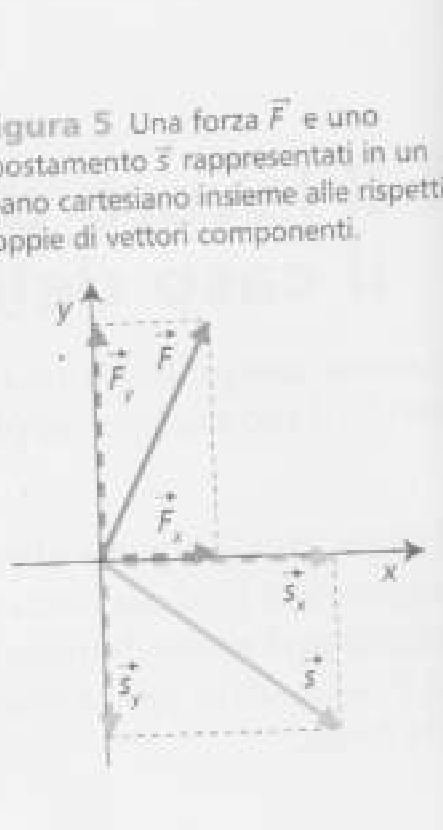


Il lavoro è negativo perché il componente $\vec{F}_{//}$ di $\vec{F}$ secondo la direzione di $\vec{s}$ ha verso opposto rispetto a $\vec{s}$.



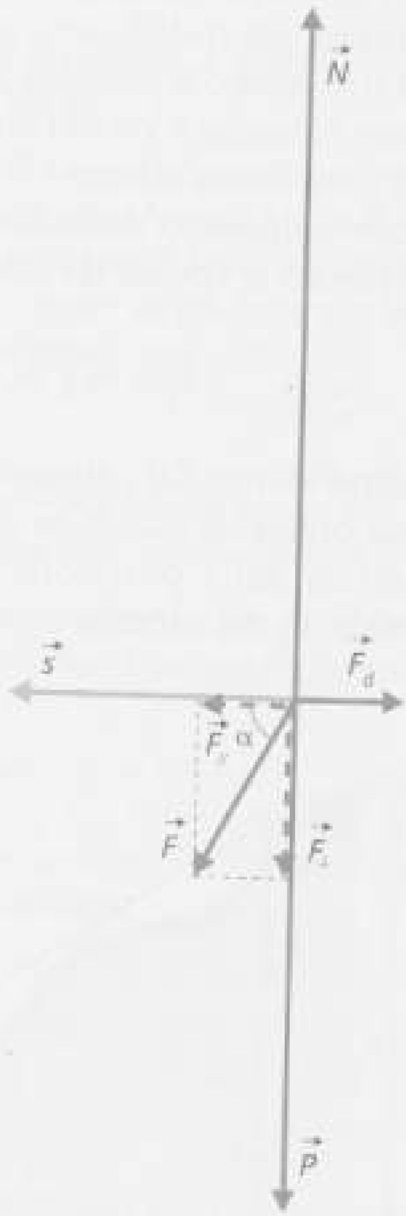
Il lavoro è nullo perché $\vec{F}$ è perpendicolare a $\vec{s}$ e quindi il suo componente $\vec{F}_{//}$ secondo la direzione di $\vec{s}$ è nullo.

Figura 5 Una forza $\vec{F}$ e uno spostamento $\vec{s}$ rappresentati in un piano cartesiano insieme alle rispettive coppie di vettori componenti.



2 Le risposte della fisica Come si sommano i lavori?

...n ragazzo spinge a velocità costante uno scatolone di ...assa 10,0 kg per una distanza di 2,00 m su un pavi...mento orizzontale, esercitando una forza costante di ...0,0 N inclinata di 60,0° rispetto al pavimento. Qual è ... lavoro compiuto da ciascuna delle forze agenti sullo ...catolone e qual è il lavoro totale? Qual è il coefficiente ... attrito dinamico fra lo scatolone e il pavimento?



Dati e incognite

$= 10{,}0$ kg $\quad s = 2{,}00$ m $\quad F = 40{,}0$ N

$= 60{,}0°$ $\quad L_F = ?$ $\quad L_P = ?$ $\quad L_d = ?$

$= ?$ $\quad L_{tot} = ?$ $\quad k_d = ?$

Soluzione

... diagramma di corpo libero sono rappresentate, insieme ... il vettore spostamento $\vec{s}$, le forze agenti sullo scatolone: il ...o $\vec{P} = m\,\vec{g}$ diretto verticalmente verso il basso, la reazione ...male $\vec{N}$ del pavimento, la forza $\vec{F}$ esercitata dal ragazzo, ...orza di attrito dinamico $\vec{F}_d$ orientata in verso opposto allo ...stamento.

...forze $\vec{P}$ ed $\vec{N}$ non compiono lavoro, essendo entrambe ...pendicolari allo spostamento $\vec{s}$. Indicando con L_P ed L_N i ...ettivi lavori si ha, cioè, $L_P = 0$ ed $L_N = 0$.

...forza $\vec{F}$, invece, è inclinata di un angolo $\alpha = 60{,}0°$ ri...tto a $\vec{s}$. La sua componente $F_{//}$ lungo la direzione di $\vec{s}$ è ...itiva e vale:

$$F_{//} = \frac{F}{2}$$

...anto essa compie un lavoro L_F positivo:

$$L_F = F_{//}\,s = \frac{F\,s}{2} = \frac{(40{,}0\,\text{N})(2{,}00\,\text{m})}{2} = 40{,}0\ \text{J}$$

...orza di attrito dinamico $\vec{F}_d$, di verso opposto rispetto ... spostamento $\vec{s}$, deve equilibrare il componente $\vec{F}_{//}$ del ...ore $\vec{F}$ secondo la direzione di $\vec{s}$, in quanto il moto ...ene a velocità costante. Si ha perciò:

$$F_d = \frac{F}{2}$$

...oro di questa forza è:

$$L_d = -F_d\,s = -\frac{F\,s}{2} = -\frac{(40{,}0\,\text{N})(2{,}00\,\text{m})}{2} = -40{,}0\ \text{J}$$

Pertanto il lavoro totale è:

$$L_{tot} = L_P + L_N + L_F + L_d = 0 + 0 + 40{,}0\ \text{J} - 40{,}0\ \text{J} = 0$$

Il lavoro totale è nullo, perché la risultante di tutte le forze agenti sullo scatolone è nulla.

In generale il lavoro totale compiuto da un sistema di forze applicate a uno stesso punto materiale è uguale al lavoro compiuto dalla loro risultante, come segue dalla definizione del lavoro. È utile tenere presente che la componente della risultante secondo la direzione dello spostamento è uguale alla somma algebrica delle componenti delle singole forze.

Per determinare il coefficiente di attrito dinamico dobbiamo calcolare il modulo di $\vec{N}$. Poiché $\vec{N}$ bilancia il peso $\vec{P}$ dello scatolone e il vettore componente $\vec{F}_{\perp}$ di $\vec{F}$ secondo la perpendicolare al pavimento, si ha:

$$N = P + F_{\perp} = m\,g + \frac{\sqrt{3}}{2}F =$$

$$= (10{,}0\ \text{kg})\,(9{,}81\ \text{m/s}^2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(40{,}0\ \text{N}) = 133\ \text{N}$$

Il coefficiente di attrito dinamico è perciò:

$$k_d = \frac{F_d}{N} = \frac{F}{2N} = \frac{40{,}0\,\text{N}}{2\,(133\,\text{N})} = 0{,}150$$

Il lavoro della forza peso

Un caso particolare di forza costante è il **peso**, o **forza peso**, di un oggetto. Poiché questa forza, che indichiamo con $\vec{P}$, è diretta secondo la verticale verso il basso, il suo lavoro è positivo se l'oggetto sta cadendo, mentre è negativo se l'oggetto è lanciato verso l'alto.
Se un corpo cade a terra da un'altezza h il lavoro della forza peso è $L = mgh$.
In generale il lavoro compiuto dalla forza peso agente su un oggetto di massa m, mentre questo si sposta da una posizione iniziale h_1 a una posizione finale h_2 è:

$$L = mg(h_1 - h_2) \tag{1}$$

Il valore di L è indipendente dal cammino percorso. Vediamo perché.
Consideriamo una biglia di massa m che rotola lungo una guida curvilinea [▸6], portandosi dalla posizione iniziale P_1 ad altezza h_1 da terra alla posizione finale P_2 ad altezza h_2 e compiendo uno spostamento $\vec{s}$ obliquo.

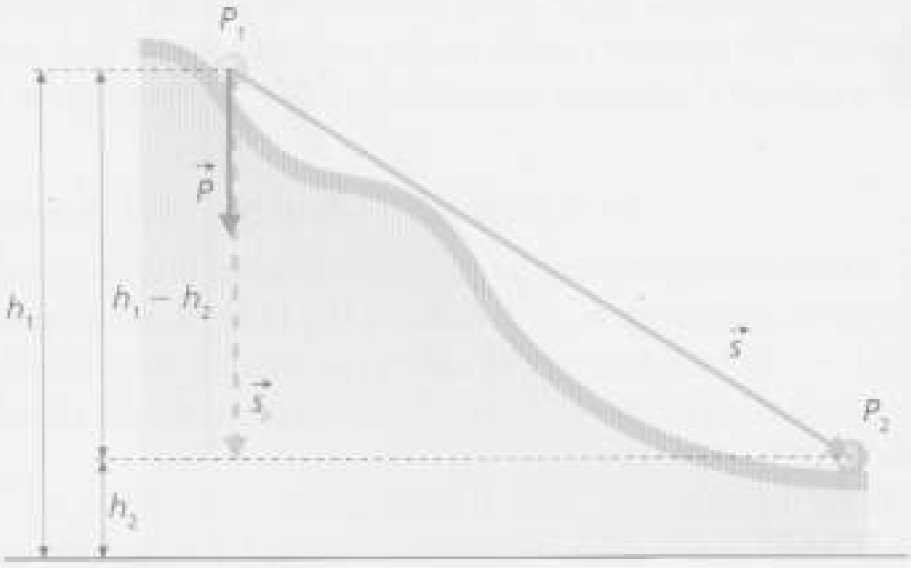


Figura 6 Indipendenza del lavoro della forza peso dal cammino percorso.

Poiché il lavoro della forza peso $\vec{P}$ può essere calcolato come prodotto fra il suo modulo $P = mg$ e la componente $s_{//} = h_1 - h_2$ dello spostamento secondo la direzione di $\vec{P}$, cioè lungo la verticale, si ha:

$$L = P s_{//} = mg(h_1 - h_2)$$

Questo risultato non dipende dal particolare percorso fra la posizione iniziale e la posizione finale, ma solo da queste due posizioni.

3 Le risposte della fisica In equilibrio dinamico... niente lavoro!

Il magazziniere di un centro commerciale spinge con una forza di 300 N diretta orizzontalmente una cassa di meloni di 50,0 kg, spostandola di 5,00 m a velocità costante su per una rampa inclinata di 15,0° rispetto al piano orizzontale. Qual è il lavoro totale compiuto sulla cassa e quale il lavoro di ciascuna delle forze agenti?

Dati e incognite

$F = 300$ N **$m = 50,0$ kg** **$s = 5,00$ m**
$\alpha = 15,0°$ $L_{tot} = ?$ $L_F = ?$ $L_P = ?$
$L_N = ?$ $L_d = ?$

Soluzione

Insieme allo spostamento $\vec{s}$ diretto su per la rampa, e quindi inclinato di un angolo $\alpha = 15,0°$ rispetto all'orizzontale, nel diagramma di corpo libero della cassa sono rappresentate la forza orizzontale $\vec{F}$ esercitata dal magazziniere, la forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$, la forza di attrito dinamico $\vec{F}_d$ e la reazione normale $\vec{N}$ della rampa.
Poiché la cassa viene spostata a velocità costante, la risultante di tutte le forze agenti su di essa durante lo spostamento è nulla.