6. Urti

ATTENZIONE

La conservazione della quantità di moto e la conservazione dell'energia

Non si deve far confusione fra conservazione della quantità di moto e conservazione dell'energia. Un errore comune è quello di pensare che la conservazione della quantità di moto implichi necessariamente la conservazione dell'energia cinetica.

Un **urto** è una situazione in cui due oggetti si colpiscono fra loro e la risultante delle forze esterne è nulla o talmente piccola da poter essere trascurata.
Un esempio di urto è quello in cui due carrozze ferroviarie che procedono su un binario sbattono l'una contro l'altra; in questo caso la risultante delle forze esterne, il peso verso il basso e la forza normale esercitata dai binari verso l'alto, è zero. Di conseguenza, la quantità di moto del sistema delle due carrozze si conserva.
Un altro esempio di urto è quello di una palla da baseball colpita da una mazza. In questo caso le forze esterne non sono nulle, perché il peso della palla non è equilibrato da alcuna altra forza. Tuttavia, le forze esercitate durante il contatto sono molto più intense del peso della palla o della mazza; quindi, con buona approssimazione, possiamo trascurare le forze esterne e dire che la quantità di moto del sistema palla-mazza si conserva.

Il fatto che durante un urto la quantità di moto del sistema si conservi non significa necessariamente che anche l'energia cinetica del sistema si conservi. In effetti, la maggior parte o addirittura tutta l'energia cinetica del sistema può essere trasformata durante un urto in altre forme di energia, mentre non viene persa neanche una piccola parte di quantità di moto.

In generale, gli urti vengono classificati a seconda di ciò che avviene all'energia cinetica del sistema. Ci sono due possibilità: dopo l'urto l'energia cinetica finale K_f è uguale a quella iniziale K_i, oppure no.
Gli urti nei quali $K_f = K_i$ sono detti **urti elastici**.
Gli urti nei quali l'energia cinetica non si conserva vengono detti **urti anelastici**.
In tali urti l'energia cinetica normalmente diminuisce, a causa delle perdite associate al suono, al calore o alla deformazione, talvolta aumenta, come avviene quando l'urto produce un'esplosione.

Urti elastici

Analizzeremo ora gli urti nei quali si conservano sia la quantità di moto sia l'energia cinetica, cioè gli urti elastici.

Urti elastici

In un urto elastico si conservano sia la quantità di moto sia l'energia cinetica, cioè:

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i \qquad \text{e} \qquad K_f = K_i$$

Gli urti che avvengono nella vita quotidiana non sono mai completamente elastici, perché c'è sempre una quantità significativa di energia che viene trasformata in altre forme. Tuttavia le collisioni di oggetti che rimbalzano l'uno contro

▶ *Negli urti elastici e in quelli anelastici la quantità di moto si conserva; non si può dire invece la stessa cosa per l'energia cinetica. Nell'urto fortemente anelastico dei giocatori di hockey (a sinistra) gran parte dell'energia cinetica iniziale del giocatore in corsa viene trasformata in lavoro che "modifica" l'anatomia dell'altro giocatore e rompe il vetro della pista. Nell'urto marcatamente elastico della testa con la palla (a destra) la palla rimbalza con una piccolissima riduzione dell'energia cinetica (che è ancora persa in suono e calore).*

Urti con piccole deformazioni, come ad esempio gli urti delle palle da biliardo, forniscono un'approssimazione accettabile di urto elastico. Nel mondo subatomico, invece, gli urti elastici sono piuttosto comuni.

Gli urti elastici, quindi, non sono soltanto un'idealizzazione della realtà, ma si verificano continuamente in natura.

Per cominciare, consideriamo un **urto elastico in una dimensione**, ad esempio un urto frontale fra due carrelli su una rotaia a cuscino d'aria, come mostrato nella figura 23. I carrelli sono forniti di respingenti che li fanno rimbalzare quando si scontrano.

Supponiamo che inizialmente il carrello 1 si muova verso destra con una velocità v_0 verso il carrello 2, che è fermo. Se le masse dei carrelli sono rispettivamente m_1 e m_2, la conservazione della quantità di moto può essere scritta come segue:

$$m_1 v_0 = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$$

In questa espressione $v_{1,f}$ e $v_{2,f}$ sono le velocità finali dei due carrelli. Osserviamo che si parla di velocità e non di modulo della velocità, poiché è possibile che il carrello 1 inverta la direzione del moto, nel qual caso $v_{1,f}$ diventerebbe negativa. Poiché si tratta di un urto elastico, le velocità finali devono soddisfare anche la conservazione dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2$$

Utilizzando le leggi di conservazione, abbiamo scritto due equazioni nelle incognite $v_{1,f}$ e $v_{2,f}$. Se risolviamo il sistema formato dalle due equazioni, otteniamo i valori delle due velocità incognite:

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \qquad v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

La velocità finale del carrello 1 può essere positiva, negativa o nulla, a seconda che m_1 sia rispettivamente maggiore, minore o uguale a m_2. La velocità finale del carrello 2, invece, è sempre positiva.

$$V_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2)V_1 + 2m_2 V_2}{m_1 + m_2}$$

$$V_{2,f} = \frac{(m_2 - m_1)V_2 + 2m_1 V_1}{m_1 + m_2}$$

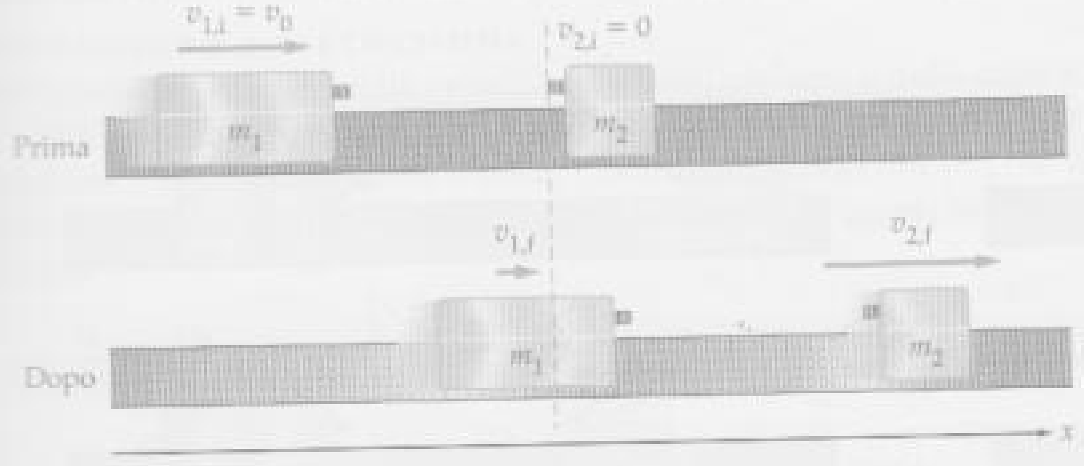


FIGURA 23 Un urto elastico fra due carrelli sulla rotaia a cuscino d'aria
Nel disegno $v_{1,f}$ è verso destra (positiva), il che significa che m_1 è maggiore di m_2. In effetti, abbiamo scelto $m_1 = 2m_2$: utilizzando le equazioni che esprimono le velocità finali otteniamo $v_{1,f} = v_0/3$ e $v_{2,f} = 4v_0/3$. Se m_1 fosse minore di m_2, il carrello 1 rimbalzerebbe indietro verso sinistra e $v_{1,f}$ sarebbe negativa.

ESERCIZIO

6 In un autoscontro di un parco di divertimenti, una vettura di 96,0 kg, che si muove con una velocità di 1,24 m/s, urta elasticamente contro un'altra vettura di 135 kg, ferma. Determina la velocità finale dei due veicoli.

Utilizzando le espressioni ricavate per le velocità finali otteniamo:

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{96{,}0\ \text{kg} - 135\ \text{kg}}{96{,}0\ \text{kg} + 135\ \text{kg}} (1{,}24\ \text{m/s}) = -0{,}209\ \text{m/s}$$

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{2(96{,}0\ \text{kg})}{96{,}0\ \text{kg} + 135\ \text{kg}} (1{,}24\ \text{m/s}) = 1{,}03\ \text{m/s}$$

Il verso del moto dell'auto 1 è opposto a quello iniziale, quindi la vettura rimbalza indietro.

Verifichiamo ora i nostri risultati in alcuni casi particolari.

a) $m_1 = m_2 = m$

Innanzitutto consideriamo il caso in cui i due carrelli hanno la stessa massa, cioè $m_1 = m_2 = m$. Sostituendo nelle formule per le velocità finali, otteniamo

$$v_{1,f} = \frac{m - m}{m + m} v_0 = 0 \qquad v_{2,f} = \frac{2m}{m + m} v_0 = v_0$$

Perciò, dopo l'urto il carrello che si muoveva con velocità v_0 è fermo e il carrello che era fermo si muove con velocità v_0. In altri termini, i carrelli si sono "scambiati" la velocità (fig. 24*a*).

b) $m_1 \ll m_2$

Supponiamo ora che m_2 sia molto più grande di m_1 o, che è lo stesso, che m_1 si possa considerare uguale a zero. Ponendo $m_1 = 0$ nelle espressioni per $v_{1,f}$ e $v_{2,f}$ otteniamo:

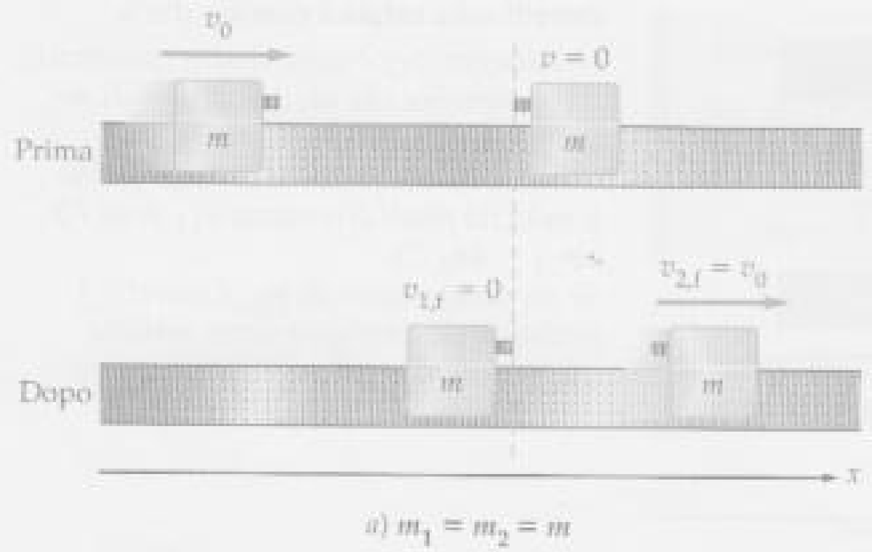
$$v_{1,f} = \frac{0 - m_2}{0 + m_2} v_0 = \frac{-m_2}{m_2} v_0 = -v_0 \qquad v_{2,f} = \frac{2 \cdot 0}{0 + m_2} v_0 = 0$$

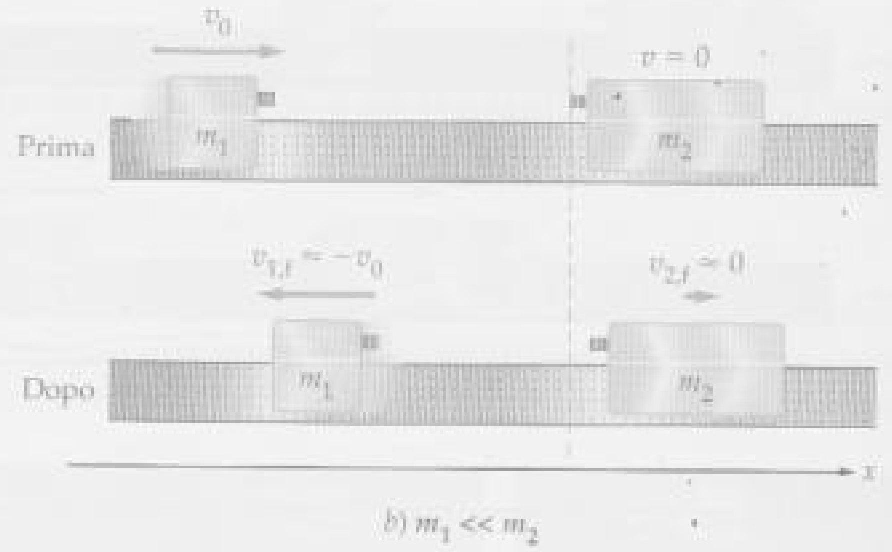
Dal punto di vista fisico questo risultato può essere interpretato nel modo seguente: se un carrello molto leggero urta contro un carrello pesante fermo, quest'ultimo praticamente non si sposta, mentre il carrello leggero rimbalza all'indietro (ricordiamo il segno meno in $-v_0$) con una velocità che ha lo stesso modulo di quella iniziale, come illustrato in figura 24*b*.

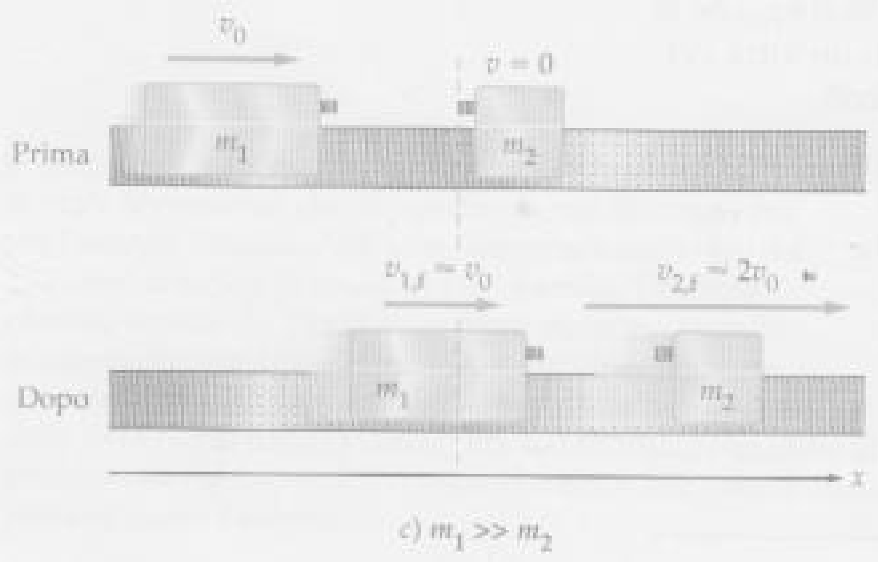
Ad esempio, se lanciamo una palla contro un muro, il muro rappresenta l'oggetto molto pesante e la palla l'oggetto leggero: la palla rimbalza indietro con una velocità di modulo uguale a quella iniziale (supponendo che l'urto sia perfettamente elastico).

c) $m_1 \gg m_2$

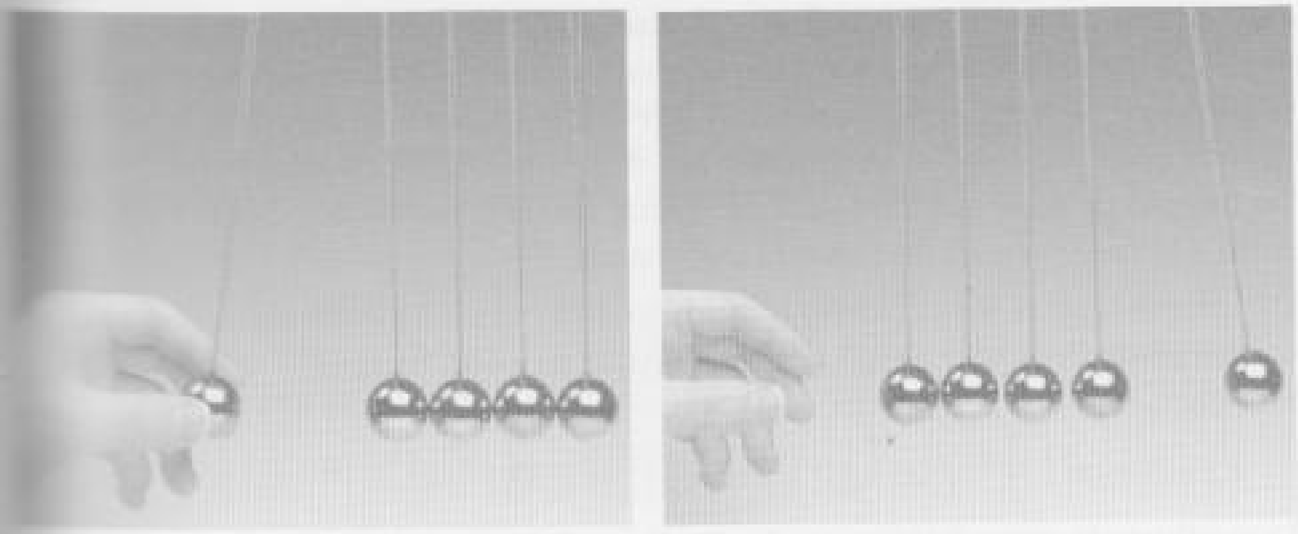
Il caso in cui m_1 è molto più grande di m_2 e quindi m_2 si può considerare uguale a zero, è analizzato nel *Rifletti sui concetti* che segue. Nella figura 24c è illustrato questo caso per gli urti fra i carrelli di una rotaia a cuscino d'aria.







◀ **FIGURA 24 Urti elastici fra carrelli: casi particolari**
a) Due carrelli di massa uguale quando si urtano si scambiano le velocità.
b) Quando un carrello leggero urta un carrello pesante fermo, inverte il verso del suo moto, ma il modulo della sua velocità rimane praticamente invariato.
c) Quando un carrello pesante urta un carrello leggero fermo, continua a muoversi nello stesso verso, più o meno con la stessa velocità; il carrello leggero si muove con una velocità approssimativamente doppia della velocità iniziale del carrello pesante.



▲ L'esperimento mostrato nelle immagini evidenzia alcune caratteristiche fondamentali degli urti elastici fra oggetti di uguale massa. Il dispositivo è costituito da cinque sfere di massa identica sospese mediante fili. Quando la sfera che si trova a un estremo viene allontanata dalla posizione di equilibrio (foto a sinistra) e rilasciata in modo che torni indietro e colpisca la seconda sfera, essa crea una rapida successione di urti elastici fra le altre sfere. In ogni urto una sfera si ferma, mentre la successiva inizia a muoversi con una velocità uguale a quella della precedente, proprio come i carrelli della rotaia a cuscino d'aria di figura 24a. Quando l'urto raggiunge l'altra estremità del dispositivo, l'ultima sfera oscilla alla stessa altezza dalla quale la prima era stata liberata (foto a destra). Se si ripete l'operazione con due sfere, cioè se si allontanano dall'equilibrio e poi si liberano due sfere, dall'altro estremo del dispositivo oscillano due sfere, e così via.

3. RIFLETTI SUI CONCETTI — L'urto fra l'elefante e la mosca

Una mosca, ferma in un punto a circa 3 m dal suolo, viene urtata da un elefante inferocito che esce correndo dalla boscaglia, e rimbalza elasticamente contro la sua fronte. Se il modulo della velocità iniziale dell'elefante è v_0, il modulo della velocità della mosca dopo l'urto è:

A. v_0
B. $1{,}5\,v_0$
C. $2v_0$

RAGIONAMENTO E DISCUSSIONE

Per determinare i moduli delle velocità finali dell'elefante e della mosca possiamo utilizzare le espressioni per le velocità finali, chiamando m_1 la massa dell'elefante e m_2 la massa della mosca. Poiché m_2 è molto più piccola di m_1, possiamo calcolare le due espressioni nel caso limite in cui m_2 tende a zero; otteniamo:

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \xrightarrow[m_2 \to 0]{} \frac{m_1}{m_1} v_0 = v_0$$

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 \xrightarrow[m_2 \to 0]{} \frac{2m_1}{m_1} v_0 = 2v_0$$

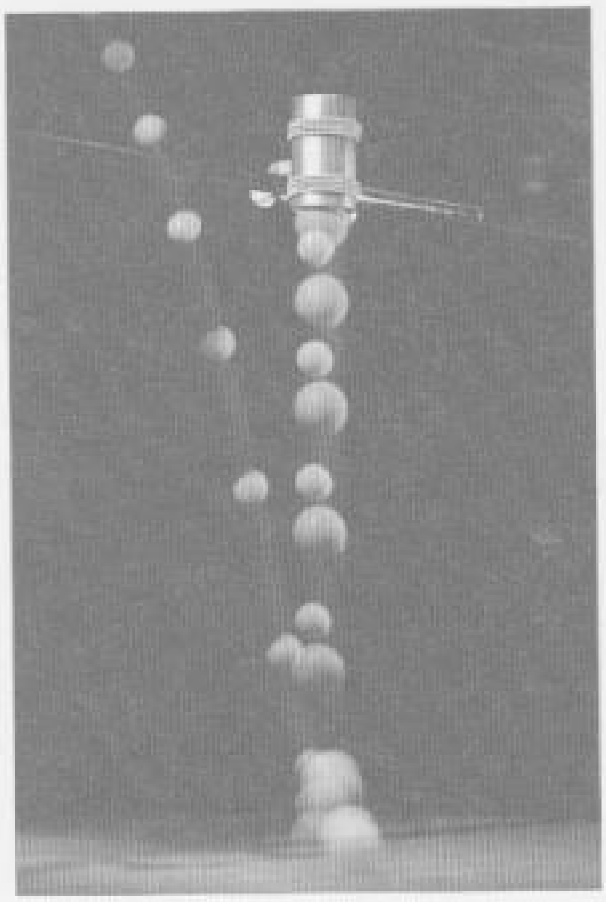
Come ci aspettavamo, il modulo della velocità dell'elefante non cambia; la mosca, invece, rimbalza con una velocità il cui modulo è il doppio del modulo della velocità dell'elefante.

RISPOSTA

La risposta è la C: il modulo della velocità della mosca dopo l'urto è $2v_0$.

In un **urto elastico in due dimensioni**, se conosciamo il modulo e la direzione della velocità finale di un oggetto, possiamo determinare il modulo e la direzione della velocità finale dell'altro oggetto utilizzando la conservazione della quantità di moto e la conservazione dell'energia cinetica.

Come esempi di urti elastici in due dimensioni consideriamo quelli che si verificano durante una partita di curling, uno sport di squadra simile alle bocce, ma giocato sul ghiaccio con delle pesanti pietre di granito levigato, dette *stone*.



▲ **Trasferimento di quantità di moto e amplificazione dell'altezza**

In un urto fra due oggetti di massa diversa, come fra le due palline di questa immagine, una parte della quantità di moto può essere trasferita dall'oggetto più grande a quello più piccolo. Anche se la quantità di moto totale del sistema si conserva, la velocità finale dell'oggetto più piccolo può essere molto maggiore di quella iniziale, come si deduce dall'altezza raggiunta dalla pallina più piccola. Un fenomeno simile si verifica nella esplosione di una supernova. Le collisioni che avvengono durante questo processo producono getti di materia che vengono espulsi e viaggiano nello spazio a velocità prossima a quella della luce, proprio come la pallina più piccola che dopo l'urto rimbalza in alto con velocità molto maggiore.

Consideriamo, ad esempio, l'urto di due stone di 7,00 kg rappresentato in figura 25. Una stone è inizialmente ferma, l'altra si avvicina con una velocità di modulo $v_{1,i} = 1{,}50\ \mathrm{m/s}$; l'urto non è frontale e, dopo lo scontro, la stone 1 si muove con una velocità di modulo $v_{1,f} = 0{,}610\ \mathrm{m/s}$ in una direzione che forma un angolo di 66,0° rispetto alla direzione iniziale del moto. Quali sono il modulo e la direzione della velocità della stone 2?

Per prima cosa determiniamo il modulo della velocità della stone 2 dopo l'urto, ponendo l'energia cinetica finale uguale a quella iniziale.
L'energia cinetica iniziale è:

$$K_i = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1,i}^2 = \tfrac{1}{2}(7{,}00\ \mathrm{kg})(1{,}50\ \mathrm{m/s})^2 = 7{,}88\ \mathrm{J}$$

ATTENZIONE

Energia cinetica negli urti elastici
Ricordiamo che negli urti elastici, per definizione, l'energia cinetica si conserva.

Dopo l'urto la stone 1 ha una velocità di modulo $v_{1,f} = 0{,}610\ \mathrm{m/s}$ e la stone 2 ha una velocità di modulo $v_{2,f}$. Quindi, l'energia cinetica finale è:

$$K_f = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1,f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2,f}^2 = \tfrac{1}{2}(7{,}00\ \mathrm{kg})(0{,}610\ \mathrm{m/s})^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2,f}^2 =$$
$$= 1{,}30\ \mathrm{J} + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2,f}^2$$

Ponendo $K_f = K_i$, otteniamo:

$$1{,}30\ \mathrm{J} + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2,f}^2 = 7{,}88\ \mathrm{J}$$

da cui, ricordando che $m_2 = 7{,}00\ \mathrm{kg}$, ricaviamo $v_{2,f} = 1{,}37\ \mathrm{m/s}$.

Per determinare la direzione del moto della stone 2 applichiamo la conservazione della quantità di moto: inizialmente non c'è alcuna quantità di moto in direzione y e ciò deve essere vero anche dopo l'urto. Quindi, possiamo scrivere la seguente condizione:

$$0 = m_1 v_{1,f}\,\mathrm{sen}\,66{,}0° - m_2 v_{2,f}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Risolvendo rispetto a θ otteniamo $\theta = 24{,}0°$.

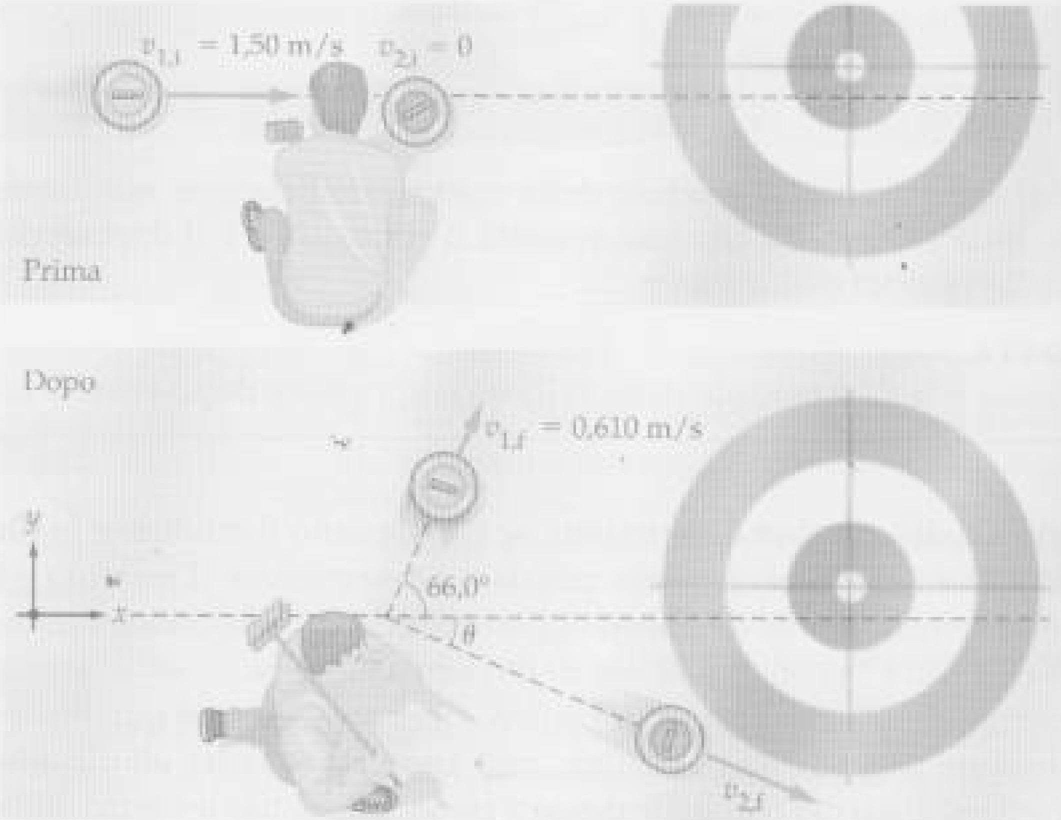
Come verifica finale, confrontiamo le componenti x delle quantità di moto iniziale e finale. Inizialmente, abbiamo:

$$p_{x,i} = m_1 v_{1,i} = (7{,}00\ \mathrm{kg})(1{,}50\ \mathrm{m/s}) = 10{,}5\ \mathrm{kg\,m/s}$$

In seguito all'urto, la componente x della quantità di moto diventa:

$$p_{x,f} = m_1 v_{1,f}\cos 66{,}0° + m_2 v_{2,f}\cos 24{,}0° =$$
$$= (7{,}00\ \mathrm{kg})(0{,}610\ \mathrm{m/s})(\cos 66{,}0°) + (7{,}00\ \mathrm{kg})(1{,}37\ \mathrm{m/s})(\cos 24{,}0°) =$$
$$= 10{,}5\ \mathrm{kg\,m/s}$$

Come ci aspettavamo, la quantità di moto è rimasta costante.



▶ **FIGURA 25 Urto elastico di due stone durante una partita di curling**
Il modulo della velocità della stone 2 dopo l'urto può essere calcolato utilizzando la conservazione dell'energia, mentre la direzione del moto può essere determinata utilizzando la conservazione della quantità di moto nelle direzioni x e y.

Urti anelastici

Un urto anelastico è un urto in cui l'energia cinetica totale del sistema, a differenza della quantità di moto totale, non si conserva. L'unica legge di conservazione applicabile è quindi quella della quantità di moto.

> **Urti anelastici**
>
> In un urto anelastico si conserva la quantità di moto del sistema, ma non si conserva la sua energia cinetica:
>
> $$\vec{p}_f = \vec{p}_i \quad \text{e} \quad K_f \neq K_i$$

Nel caso in cui dopo l'urto gli oggetti rimangono attaccati, diciamo che l'urto è **completamente anelastico**.

> **Urti completamente anelastici**
>
> Un urto è completamente anelastico se gli oggetti rimangono attaccati dopo la collisione.

Negli urti completamente anelastici si perde la massima quantità di energia cinetica. In particolare, se la quantità di moto totale del sistema è zero, nell'urto viene persa tutta l'energia cinetica, se la quantità di moto totale non è nulla, una certa quantità di energia cinetica rimane dopo l'urto, ma la parte persa è comunque la massima possibile permessa dalla conservazione della quantità di moto.

Consideriamo un sistema formato da due vagoni ferroviari identici, di massa m, su un binario orizzontale liscio. Un vagone è inizialmente fermo, mentre l'altro si muove verso il primo con velocità v_0, come mostrato in figura 26. Quando i vagoni si urtano, scatta il meccanismo di aggancio e i due vagoni si attaccano l'uno all'altro e si muovono come un unico oggetto. Qual è la velocità dei vagoni dopo l'urto?

Per rispondere alla domanda studiamo il caso generale di un urto completamente anelastico e applichiamo poi i risultati al caso specifico dei due vagoni. Supponiamo che due oggetti di massa m_1 e m_2 abbiano velocità iniziali rispettivamente $v_{1,i}$ e $v_{2,i}$. La quantità di moto iniziale del sistema è:

$$p_i = m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i}$$

Dopo l'urto gli oggetti si muovono insieme con la stessa velocità v_f, quindi la quantità di moto finale è:

$$p_f = (m_1 + m_2) v_f$$

Uguagliando le quantità di moto iniziale e finale, otteniamo:

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = (m_1 + m_2) v_f$$

da cui:

$$v_f = \frac{m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i}}{m_1 + m_2}$$

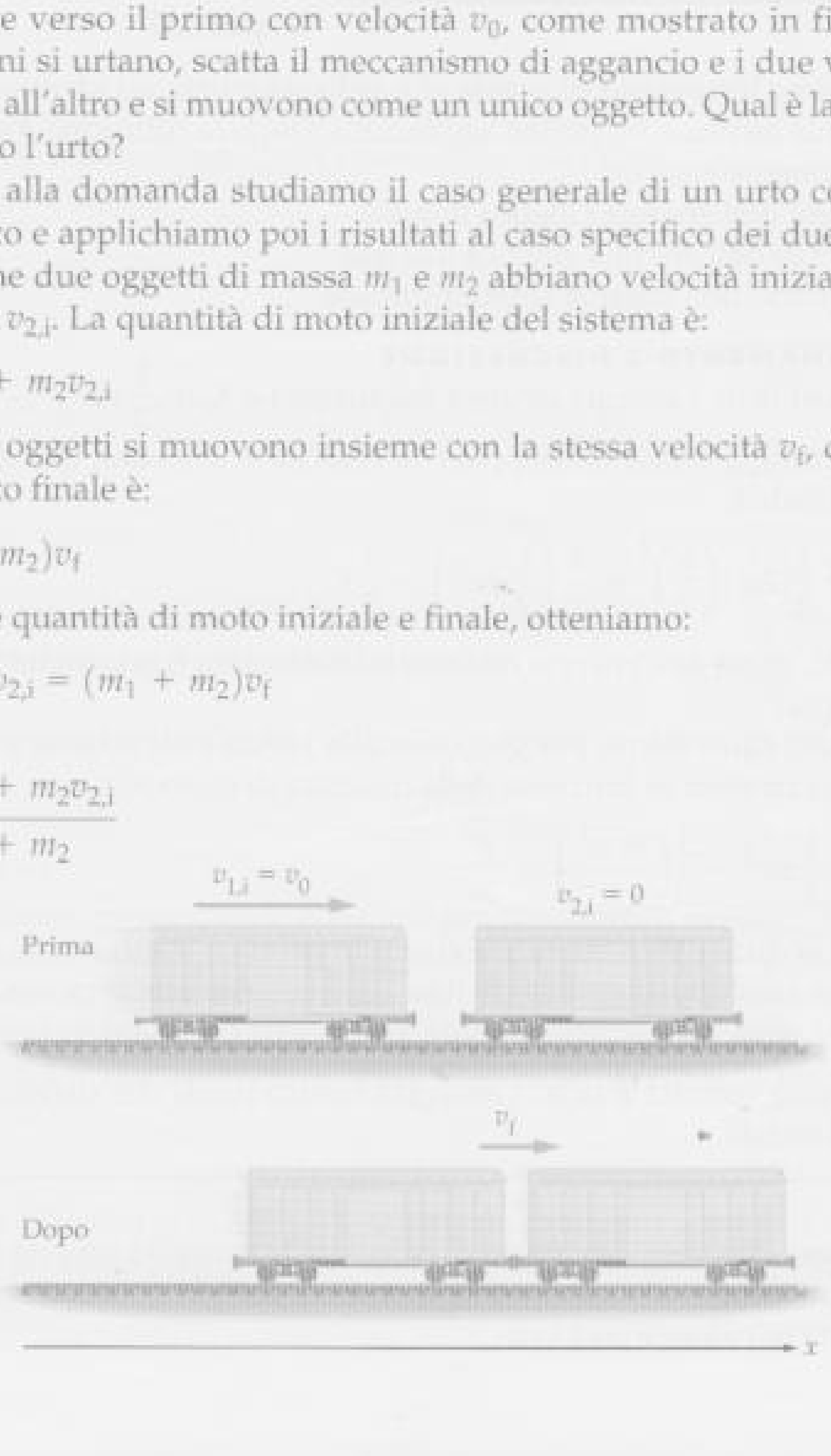


FIGURA 26 Due vagoni ferroviari si urtano e si agganciano l'uno all'altro
Un vagone ferroviario in movimento urta contro un identico vagone fermo. Dopo l'urto, i vagoni rimangono agganciati l'uno all'altro e si muovono con la stessa velocità.

Applichiamo il risultato generale al caso dei due vagoni osservando che, in questo caso, $m_1 = m_2 = m$, $v_{1,i} = v_0$ e $m_2 = 0$, perciò la velocità finale è:

$$v_f = \frac{m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i}}{m + m} = \frac{m v_0 + m \cdot 0}{m + m} = \frac{m}{2m} v_0 = \frac{1}{2} v_0$$

Com'era prevedibile, la velocità finale è la metà della velocità iniziale.

ESERCIZIO

7 Un'automobile di 1200 kg che si muove a 2,5 m/s viene tamponata da un furgone di 2600 kg in moto a 6,2 m/s. Se i veicoli, dopo la collisione, rimangono attaccati, qual è la loro velocità immediatamente dopo l'urto? (Ignora le forze esterne).

Dall'espressione della velocità finale otteniamo:

$$v_f = \frac{m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i}}{m_1 + m_2} = \frac{(1200\ \text{kg})(2{,}5\ \text{m/s}) + (2600\ \text{kg})(6{,}2\ \text{m/s})}{(1200 + 2600)\ \text{kg}} = 5{,}0\ \text{m/s}$$

Durante la collisione dei vagoni ferroviari una parte dell'energia cinetica iniziale viene convertita in altre forme: parte si propaga nell'ambiente sotto forma di suono, parte è trasformata in calore, parte produce deformazioni permanenti nel metallo del meccanismo di aggancio.

4. RIFLETTI SUI CONCETTI — Quanta energia cinetica è persa?

Un vagone ferroviario di massa m e velocità v urta un identico vagone, inizialmente fermo, e vi rimane agganciato. Dopo la collisione, l'energia cinetica del sistema è:

A la metà dell'energia cinetica iniziale.
B un terzo dell'energia cinetica iniziale.
C un quarto dell'energia cinetica iniziale.

RAGIONAMENTO E DISCUSSIONE

Prima dell'urto, l'energia cinetica del sistema è $K_i = \frac{1}{2} m v^2$.

Dopo l'urto la massa raddoppia e la velocità si dimezza, quindi l'energia cinetica finale è:

$$K_f = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \frac{1}{2} K_i$$

Pertanto, metà dell'energia cinetica iniziale viene trasformata in altre forme di energia.
Un modo equivalente per giungere alla stessa conclusione è di esprimere l'energia cinetica in funzione della quantità di moto $p = mv$:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2 v^2}{m}\right) = \frac{p^2}{2m}$$

Poiché la quantità di moto p è costante prima e dopo l'urto, il fatto che la massa m raddoppi significa che l'energia cinetica K si dimezza.

RISPOSTA

La risposta corretta è la A: l'energia cinetica finale del sistema è la metà di quella iniziale.

Osserviamo che siamo in grado di calcolare la quantità precisa di energia cinetica persa, ma non di determinare quanta di questa è stata trasformata in suono, quanta in calore e così via.

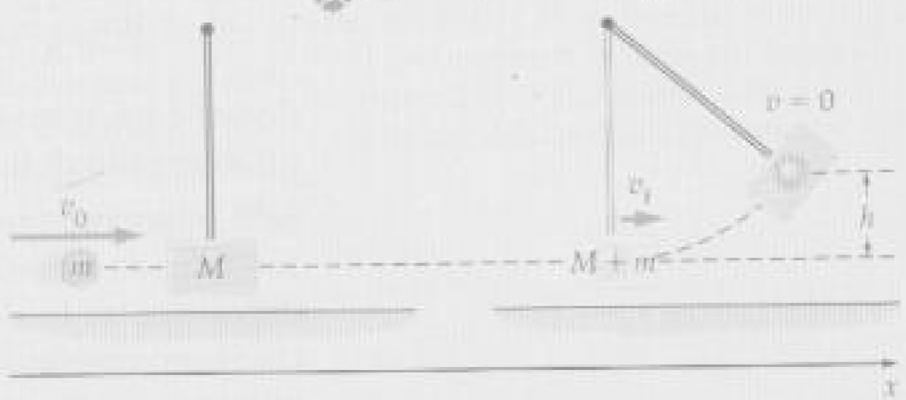
.PROBLEMA Il pendolo balistico

Il pendolo balistico è un dispositivo inventato da B. Robins nel 1742 per misurare la quantità di moto di un proiettile; esso rappresenta un esempio classico di urto completamente anelastico.
Un oggetto di massa m viene sparato con velocità iniziale v_0 contro l'equipaggio mobile di un pendolo balistico, formato da un blocchetto di massa M e da un filo di massa trascurabile. Dopo l'urto, l'oggetto e il blocco mobile rimangono attaccati e oscillano lungo un arco, raggiungendo alla fine un'altezza h. Determina l'altezza h in funzione di m, M, v_0 e g.

DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

La figura mostra l'apparato di un pendolo balistico. Inizialmente soltanto l'oggetto di massa m è in moto, nella direzione positiva dell'asse x, con velocità v_0. Immediatamente dopo l'urto il blocco M e l'oggetto si muovono insieme con una nuova velocità v_f, che è determinata dalla conservazione della quantità di moto. Infine il pendolo continua a oscillare verso destra, finché la sua velocità non diventa uguale a zero e il pendolo si ferma a un'altezza h.

FIGURA INTERATTIVA



STRATEGIA

Nel pendolo balistico avvengono due distinti processi fisici. Il primo è un urto completamente anelastico fra l'oggetto m e il blocchetto M; durante questa collisione si conserva la quantità di moto, ma non l'energia cinetica. Dopo la collisione l'energia cinetica rimanente viene trasformata in energia potenziale gravitazionale, che determina l'altezza raggiunta dall'oggetto e dal blocco M.

SOLUZIONE

Poniamo la quantità di moto prima dell'urto uguale alla quantità di moto subito dopo l'urto; chiamiamo v_f la velocità subito dopo l'urto:

$$mv_0 = (M + m)v_f$$

Risolviamo rispetto a v_f:

$$v_f = \frac{m}{M + m} v_0$$

Calcoliamo l'energia cinetica subito dopo l'urto:

$$K_f = \frac{1}{2}(M + m)v_f^2 = \frac{1}{2}(M + m)\left(\frac{m}{M + m}\right)^2 v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \frac{m}{M + m}$$

Poniamo l'energia cinetica subito dopo l'urto uguale all'energia potenziale gravitazionale all'altezza h:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 \frac{m}{M + m} = (M + m)gh$$

Risolviamo rispetto all'altezza h:

$$h = \left(\frac{m}{M + m}\right)^2 \frac{v_0^2}{2g}$$

OSSERVAZIONI

Il pendolo balistico viene spesso utilizzato per misurare la velocità di un oggetto che si muove molto rapidamente, come ad esempio una pallottola. Se una pallottola viene sparata dritta verso l'alto, raggiunge un'altezza $v_0^2/2g$, che può essere anche di alcune migliaia di metri. Se invece una pallottola di massa m viene sparata contro un pendolo balistico nel quale il blocco ha una massa M molto più grande di m, la pallottola raggiunge soltanto una piccola frazione dell'altezza precedente. Perciò il pendolo balistico rende la misura più conveniente e pratica.

PROVA TU

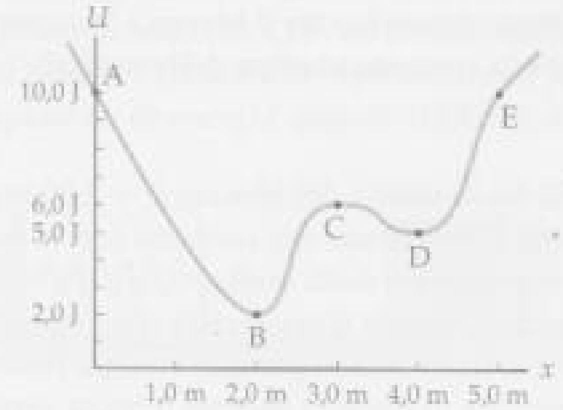
Una pallottola di massa $m = 7{,}00$ g viene sparata contro un pendolo balistico il cui blocco ha una massa $M = 0{,}950$ kg. Se il blocco dopo l'urto raggiunge un'altezza di 0,220 m, qual è la velocità iniziale della pallottola?

[$v_0 = 284$ m/s; se la pallottola fosse sparata dritta verso l'alto in assenza della resistenza dell'aria salirebbe fino a 4,11 km]

60 Un oggetto che si muove lungo l'asse x, ha un'energia potenziale il cui andamento è riportato nella figura. L'oggetto ha massa 1,1 kg e parte da fermo dal punto A.

a) Qual è il modulo della sua velocità nei punti B, C e D?

b) Quali sono i punti di inversione del moto per l'oggetto?



[*a)* $v_B = 3{,}8$ m/s; $v_C = 2{,}7$ m/s; $v_D = 3{,}0$ m/s; *b)* A, E]

61 Un oggetto di 1,34 kg che si muove lungo l'asse x, ha un'energia potenziale il cui andamento è riportato nella figura del problema precedente. Se il modulo della velocità dell'oggetto nel punto C è 1,25 m/s, dove si trovano approssimativamente i suoi punti di inversione del moto?

[in $x = 0{,}6$ m e $x = 4{,}6$ m]

62 **L'altalena** Un bambino di 23 kg dondola avanti e indietro su un sedile sospeso a un albero mediante una corda lunga 2,5 m. Disegna la curva che rappresenta l'energia potenziale di questo sistema in funzione dell'angolo che la corda forma con la verticale, assumendo che l'energia potenziale sia zero nel punto in cui la corda è verticale. Considera angoli fino a 90° su entrambi i lati della verticale.

63 Determina gli angoli corrispondenti ai punti di inversione del moto del problema precedente nel caso in cui il bambino ha una velocità di modulo 0,89 m/s quando la corda è verticale. Indica i punti di inversione sul grafico che rappresenta l'energia potenziale del sistema. [$\theta = \pm 10°$]

64 Un blocco di massa $m = 0{,}95$ kg è agganciato a una molla di costante elastica $k = 775$ N/m che oscilla su una superficie liscia orizzontale.

a) Disegna la curva dell'energia potenziale della molla tra $x = -5{,}00$ cm e $x = 5{,}00$ cm.

b) Determina i punti di inversione del moto del blocco sapendo che la sua velocità in $x = 0$ è 1,3 m/s.

[*b)* punti di inversione: ±4,6 cm]

65 **L'energia della palla** Una palla di massa $m = 0{,}75$ kg viene lanciata verticalmente verso l'alto con una velocità iniziale di 8,9 m/s.

a) Disegna la curva dell'energia potenziale gravitazionale della palla dal suo punto di lancio, $y = 0$, fino all'altezza $y = 5{,}0$ m. Poni $U = 0$ in $y = 0$.

b) Determina il punto di inversione del moto (altezza massima) della palla.

[*b)* $y_{max} = 4{,}0$ m]

Urti

66 Un carrello di massa m, che si muove con una velocità v su una rotaia a cuscino d'aria priva di attrito, urta contro un identico carrello che è in quiete. Se i due carrelli rimangono attaccati dopo la collisione, qual è l'energia cinetica finale del sistema?

[$\frac{1}{4}mv^2$]

67 **Pessima idea!** Un elefante di massa 5240 kg si muove diritto verso di te, in atteggiamento di carica, con una velocità di modulo 4,55 m/s. Tu lanci contro l'elefante una palla di gomma di 0,150 kg, con una velocità di modulo 7,81 m/s.

a) Quando la palla rimbalza indietro verso di te, qual è il modulo della sua velocità?

b) Come spieghi il fatto che l'energia cinetica della palla è aumentata?

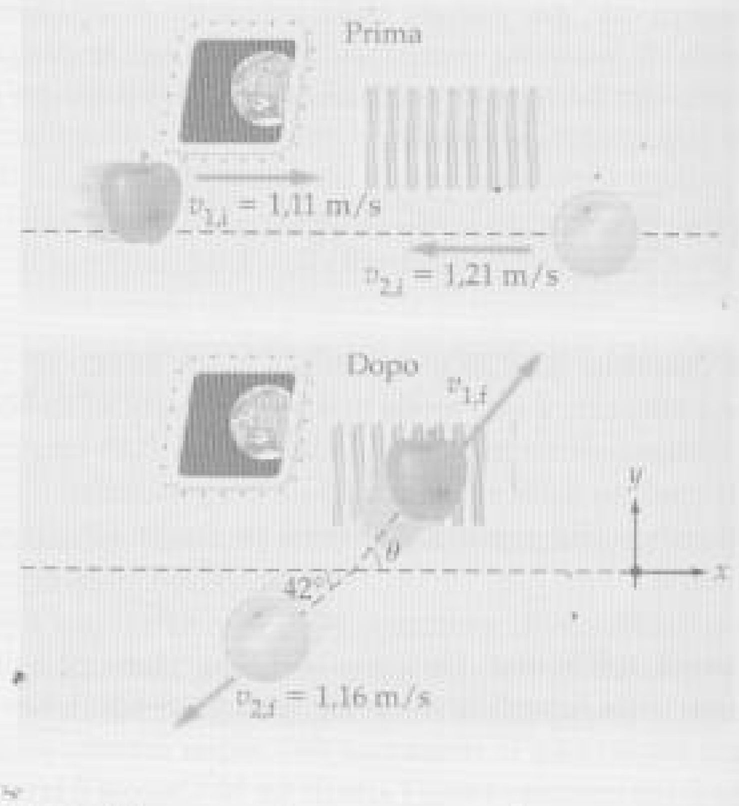
[*a)* 16,9 m/s]

68 **Tamponamento 1** Un'automobile di 732 kg ferma a un incrocio viene tamponata da un furgone di 1720 kg che si muove a una velocità di 15,5 m/s. Se l'automobile era in folle e i freni non erano azionati, e quindi l'urto si può considerare approssimativamente elastico, determina la velocità finale di entrambi i veicoli dopo l'urto.

[$v_{fur} = 6{,}25$ m/s, $v_{auto} = 21{,}7$ m/s]

69 PROBLEMA GUIDATO

Urti elastici nello spazio **Due astronauti, situati in parti opposte della navicella, confrontano il cibo del loro pranzo. Uno ha una mela, l'altro un'arancia e decidono di scambiarsele. L'astronauta 1 lancia la mela di 0,130 kg verso l'astronauta 2 con una velocità di modulo 1,11 m/s; l'astronauta 2 lancia l'arancia di 0,160 kg all'astronauta 1 con una velocità di modulo 1,21 m/s. Sfortunatamente i due frutti si scontrano e l'arancia viene deviata con una velocità di modulo 1,16 m/s in una direzione che forma un angolo di 42,0° rispetto a quella originale del moto. Determina il modulo e la direzione della velocità finale della mela, supponendo che l'urto sia elastico.**



SOLUZIONE

Prima dell'urto la mela si muove nella direzione positiva dell'asse x con una velocità di 1,11 m/s e l'arancia si muove nella direzione negativa dell'asse x con una velocità di 1,21 m/s: prima dell'urto non c'è quantità di moto in direzione y.

Dopo l'urto l'arancia si muove con una velocità di 1,16 m/s in una direzione che forma un angolo di 42° al di sotto dell'asse x negativo e quindi ha una quantità di moto nella dizione dell'asse y negativo. Per annullare questa quantità di moto in direzione y la mela si deve muovere in una direzione che forma un angolo θ al di sopra dell'asse x positivo, come mostrato in figura.

Calcola l'energia cinetica iniziale del sistema:

$$K_i = \frac{1}{2}m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,i}^2 =$$
$$= \frac{1}{2}(0{,}130 \text{ kg})(1{,}11 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(0{,}160 \text{ kg})(1{,}21 \text{ m/s})^2 =$$
$$= 0{,}197 \text{ J}$$

Calcola l'energia cinetica finale del sistema in funzione di $v_{1,f}$

$$K_f = \frac{1}{2}m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,f}^2 =$$
$$= \frac{1}{2}(0{,}130 \text{ kg})v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}(0{,}160 \text{ kg})(1{,}16 \text{ m/s})^2 =$$
$$= \frac{1}{2}(0{,}130 \text{ kg})v_{1,f}^2 + 0{,}108 \text{ J}$$

Poni $K_f = K_i$:

$$\frac{1}{2}(0{,}130 \text{ kg})v_{1,f}^2 + 0{,}108 \text{ J} = 0{,}197 \text{ J}$$
$$v_{1,f} = \sqrt{\frac{2(0{,}197 \text{ J} - 0{,}108 \text{ J})}{0{,}130 \text{ kg}}} = 1{,}17 \text{ m/s}$$

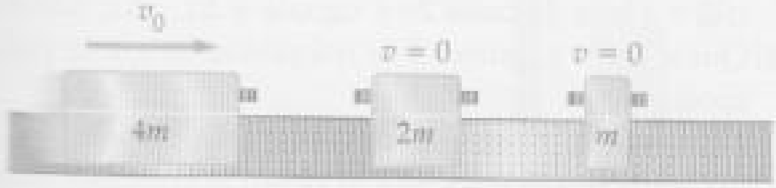
Poni la componente y della quantità di moto finale uguale a zero per determinare l'angolo θ:

$$0 = m_1 v_{1,f}(\text{sen }\theta) - m_2 v_{2,f}(\text{sen } 42{,}0°)$$

Risolvi rispetto a θ:

$$\text{sen }\theta = \frac{m_2 v_{2,f}(\text{sen } 42{,}0°)}{m_1 v_{1,f}} =$$
$$= \frac{(0{,}160 \text{ kg})(1{,}16 \text{ m/s})(\text{sen } 42{,}0°)}{(0{,}130 \text{ kg})(1{,}17 \text{ m/s})} = 0{,}817$$
$$\theta = \text{sen}^{-1}(0{,}817) = 54{,}8°$$

70 I tre carrelli sulla rotaia a cuscino d'aria mostrati nella figura hanno masse rispettivamente $4m$, $2m$ ed m. Il carrello con massa maggiore ha una velocità iniziale v_0, mentre gli altri due carrelli sono inizialmente a riposo. Tutti i carrelli sono forniti di paraurti a molla che rendono le collisioni elastiche.
a) Determina la velocità finale di ciascun carrello.
b) Verifica che l'energia cinetica finale del sistema è uguale a quella iniziale. (Assumi che la rotaia sia abbastanza lunga per contenere tutte le collisioni).

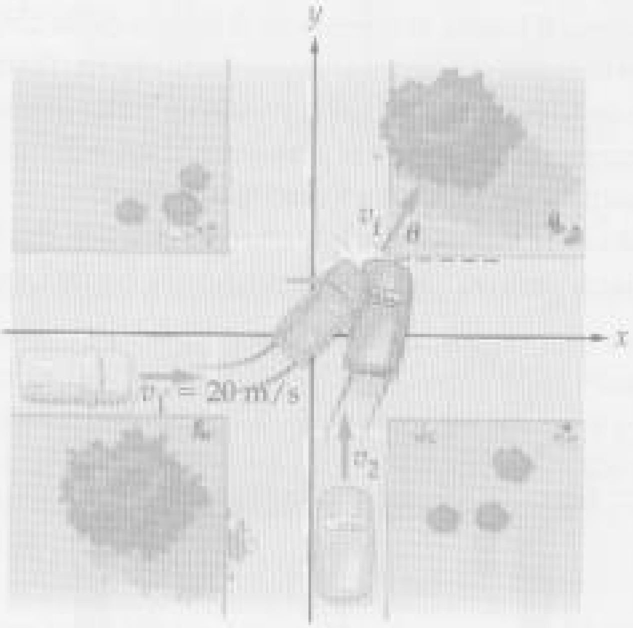


[*a)* nell'ordine: $\frac{1}{3}v_0$, $\frac{4}{9}v_0$, $\frac{16}{9}v_0$]

71 **Tamponamento 2** Un'automobile di 1000 kg che si muove a 2,3 m/s viene tamponata da un furgone di 2200 kg che viaggia a una velocità di 5,8 m/s.
a) Se, dopo la collisione, i veicoli rimangono attaccati, l'energia cinetica finale del sistema automobile-furgone è maggiore, minore o uguale alla somma delle energie cinetiche iniziali dell'auto e del furgone separatamente? Giustifica la risposta.
b) Verifica la risposta alla domanda precedente calcolando l'energia cinetica iniziale e finale del sistema.

[*a)* minore; *b)* $K_i = 39{,}6$ kJ, $K_f = 35{,}4$ kJ]

72 **Incrocio pericoloso** Una berlina di massa 950 kg che viaggia con una velocità di modulo $v_1 = 20$ m/s si avvicina a un incrocio, mentre una monovolume di 1300 kg sta sopraggiungendo da destra, come mostrato in figura. La berlina e la monovolume si urtano e rimangono attaccate insieme, in una direzione che forma un angolo θ. Determina il modulo della velocità iniziale della monovolume e della velocità finale dei due veicoli. Assumi che le forze esterne siano trascurabili. [$v_2 = 12$ m/s; $v_f = 11$ m/s]



73 **Giocatori di hockey** Due giocatori di hockey di 72,0 kg che si muovono a 5,45 m/s si urtano e rimangono attaccati. Se l'angolo fra le loro direzioni iniziali era di 115°, qual è il modulo della loro velocità dopo la collisione? [2,93 m/s]

74 Un blocco di legno di 0,420 kg legato a una cordicella pende dal soffitto. Una palla di stucco di 0,0750 kg viene gettata diritta verso l'alto, colpisce il fondo del blocco con una velocità di modulo 5,74 m/s e rimane appiccicata al blocco.
a) L'energia meccanica del sistema si conserva?
b) Di quanto sale il sistema blocco-stucco rispetto alla posizione originale del blocco? [*a)* no; *b)* 3,86 cm]

75 **Moderare un neutrone** In un reattore nucleare i neutroni prodotti dalla reazione di fissione dei nuclei devono essere rallentati in modo da poter innescare ulteriori reazioni in altri nuclei. Per valutare quale tipo di materiale è più efficace per rallentare (o, come si dice in termine tecnici, "moderare") i neutroni, calcola il rapporto K_f/K_i fra l'energia cinetica finale e l'energia cinetica iniziale di un neutrone (la cui massa è $m = 1{,}009$ u, dove u è l'unità di massa atomica, pari a $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg) in un urto frontale elastico con ciascuna delle seguenti particelle bersaglio ferme:
a) un elettrone (la cui massa è $M = 5{,}49 \cdot 10^{-4}$ u);
b) un protone (la cui massa è $M = 1{,}007$ u);
c) il nucleo di un atomo di piombo (di massa $M = 207{,}2$ u).

[*a)* 0,9978; *b)* $1 \cdot 10^{-6}$; *c)* 0,9807; il materiale più efficace è il nucleo di piombo]