1. Grandezze scalari e grandezze vettoriali

Tra le grandezze fisiche ve ne sono alcune che sono espresse solo da un valore numerico, accompagnato da un'unità di misura. Una **grandezza** di questo tipo è detta **scalare**.

Grandezza scalare

Una grandezza scalare è una grandezza fisica espressa da un *numero* accompagnato da un'unità di misura.

Esempi di grandezze scalari sono la *massa* di un oggetto, il *volume* di un recipiente, la *durata* di un evento, la *densità* di un materiale.

Talvolta un numero non è sufficiente a descrivere una grandezza fisica ed è necessario associare a esso anche una direzione. Ad esempio, supponiamo di essere in una città che non conosciamo e di voler andare in biblioteca. Chiediamo a un passante: «Sa dov'è la biblioteca?» Se il passante risponde «Sì, si trova a mezzo kilometro da qui» non ci è di grande aiuto, perché la biblioteca potrebbe essere in qualsiasi punto di una circonferenza di raggio 0,5 km, come mostrato in figura 1. Per conoscere esattamente dove è situata la biblioteca, abbiamo bisogno di una risposta del tipo: "Sì, la biblioteca è a mezzo kilometro a nord-ovest da qui.".

Lo *spostamento* dalla nostra posizione iniziale al punto in cui si trova la biblioteca è una grandezza fisica determinata non solo dalla distanza percorsa, ma anche dalla direzione (nord-ovest) e dal verso del movimento. In figura 1 lo spostamento è rappresentato da una freccia che punta nella **direzione** e nel **verso** del moto e la cui lunghezza, che chiameremo **modulo** o **intensità** (0,5 km, in questo caso), rappresenta la *distanza* in linea d'aria tra la posizione iniziale e la biblioteca. Lo spostamento è un esempio di grandezza vettoriale.

A ATTENZIONE

Direzione e *verso* sono due cose diverse: dicendo che un aereo vola lungo la rotta Milano - Roma, indichiamo la direzione del volo; specificando che l'aereo viaggia da Milano verso Roma, indichiamo il verso.

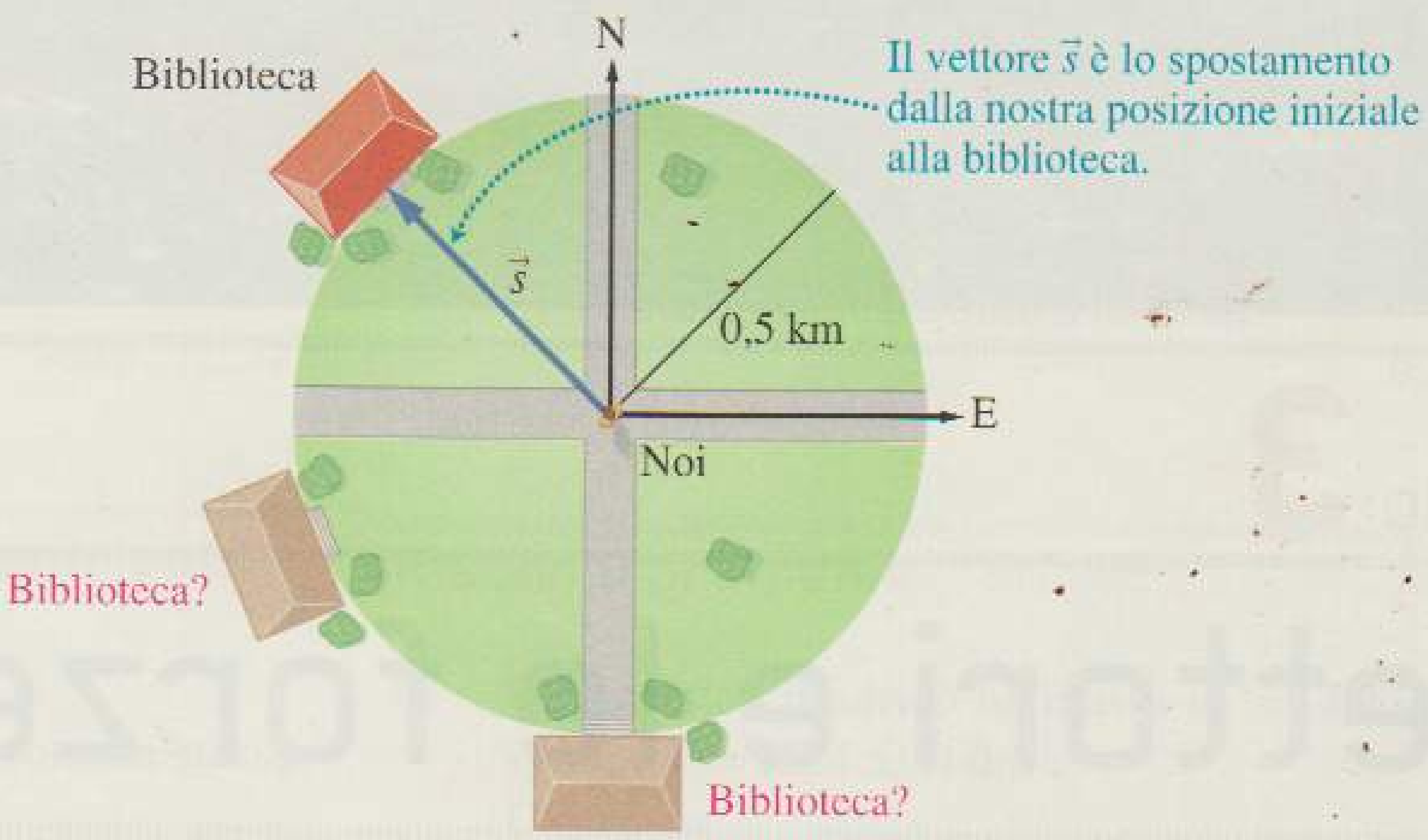


figura 1

Spostamento: distanza, direzione e verso

Se sappiamo che la biblioteca è a 0,5 km a nord-ovest da noi, conosciamo esattamente la sua posizione.

In generale, una grandezza fisica specificata da un modulo, che è un numero non negativo con un'unità di misura, da una direzione e da un verso è detta **grandezza vettoriale**.

Grandezza vettoriale e vettore

Una grandezza vettoriale è una grandezza fisica rappresentata matematicamente da un vettore.

Un vettore è un ente matematico definito da un *modulo* (che è un numero non negativo), una *direzione* e un *verso*.

figura 2

Rappresentazione grafica di un vettore

Sono grandezze vettoriali, ad esempio, lo *spostamento*, la *velocità* e l'*accelerazione* di un oggetto e le *forze*, cui è dedicato questo capitolo.

Per rappresentare graficamente un vettore useremo una freccia, come in figura 2. Il simbolo di un vettore sarà una *lettera* (maiuscola o minuscola) *in corsivo con una piccola freccia sopra*. La stessa lettera senza freccia indicherà il modulo del vettore.

2. Operazioni con i vettori

Con i vettori è possibile effettuare varie operazioni. Quelle di cui ci occuperemo sono l'addizione e la sottrazione di vettori e la moltiplicazione di un vettore per un numero.

Somma di vettori

Curiosando in una vecchia cassa in soffitta trovi la mappa di un tesoro. La mappa dice che, per localizzare il tesoro, devi partire dall'albero di magnolia che si trova in cortile, fare 5 passi verso nord e poi 3 verso est. Se questi due spostamenti sono rappresentati dai vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ in figura 3, lo spostamento totale dall'albero al tesoro è dato dal vettore $\vec{C}$.

Diciamo che $\vec{C}$ è il **vettore somma** di $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e scriviamo:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

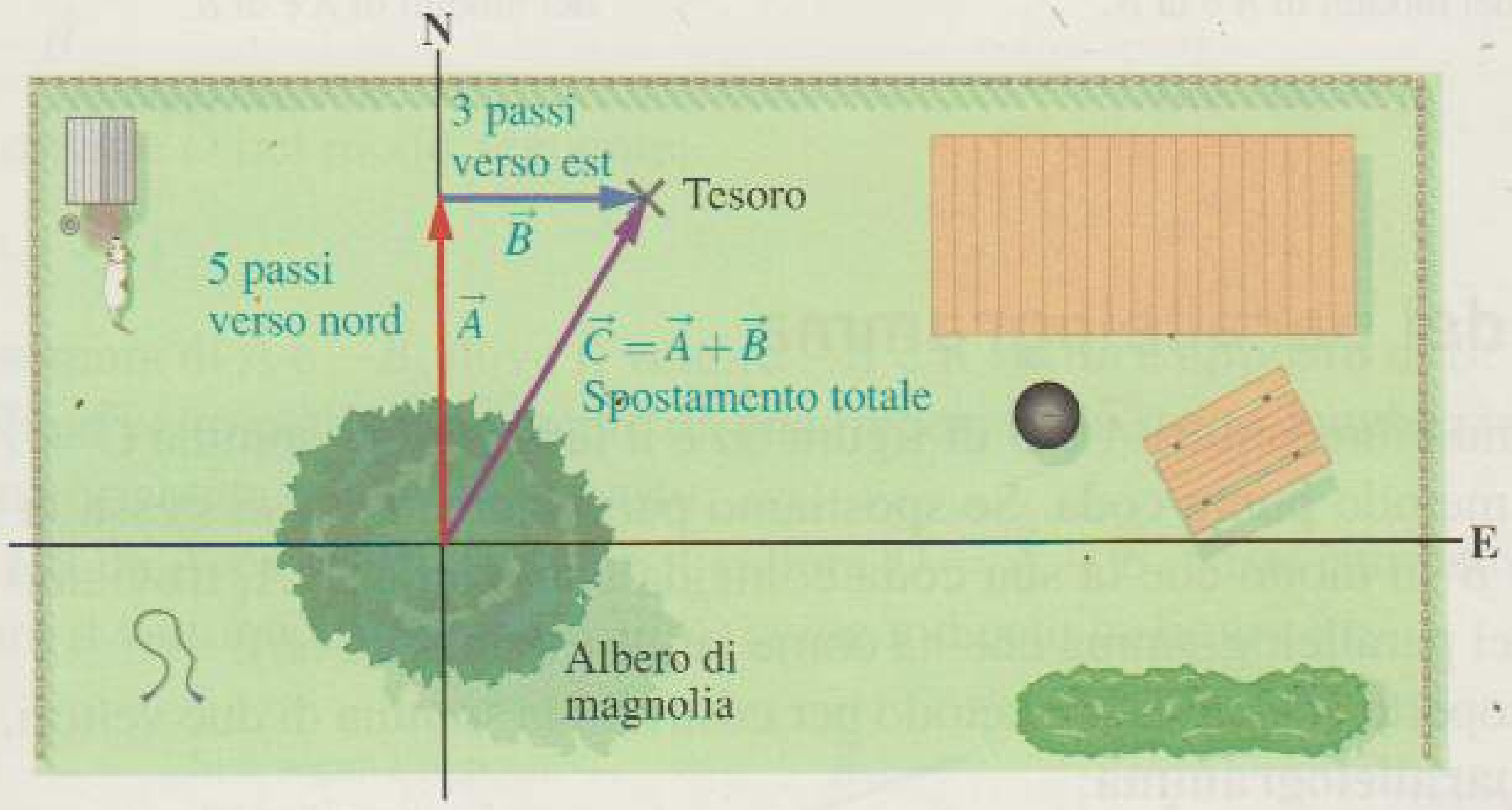


figura 3

Somma di due vettori

Lo spostamento totale dall'albero al tesoro è la somma degli spostamenti $\vec{A}$ e $\vec{B}$, cioè $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.

In generale i vettori si sommano graficamente secondo la seguente regola, detta **metodo punta-coda**:

Somma di due vettori: metodo punta-coda

Per sommare i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$:

- si dispone la coda di $\vec{B}$ sulla punta di $\vec{A}$;
- la somma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ è il vettore che va dalla coda di $\vec{A}$ alla punta di $\vec{B}$.

Per applicare il metodo punta-coda è necessario spostare i vettori. Questa operazione non comporta alcun problema *se i vettori vengono spostati parallelamente a se stessi*, senza modificarne la lunghezza e il verso. Rette parallele rappresentano infatti la stessa direzione e, poiché un vettore è definito solo dal suo modulo, dalla sua direzione e dal suo verso, se questi non cambiano, non cambia neanche il vettore. Il metodo punta-coda è illustrato in figura 4.

TUTOR
Disegno attivo

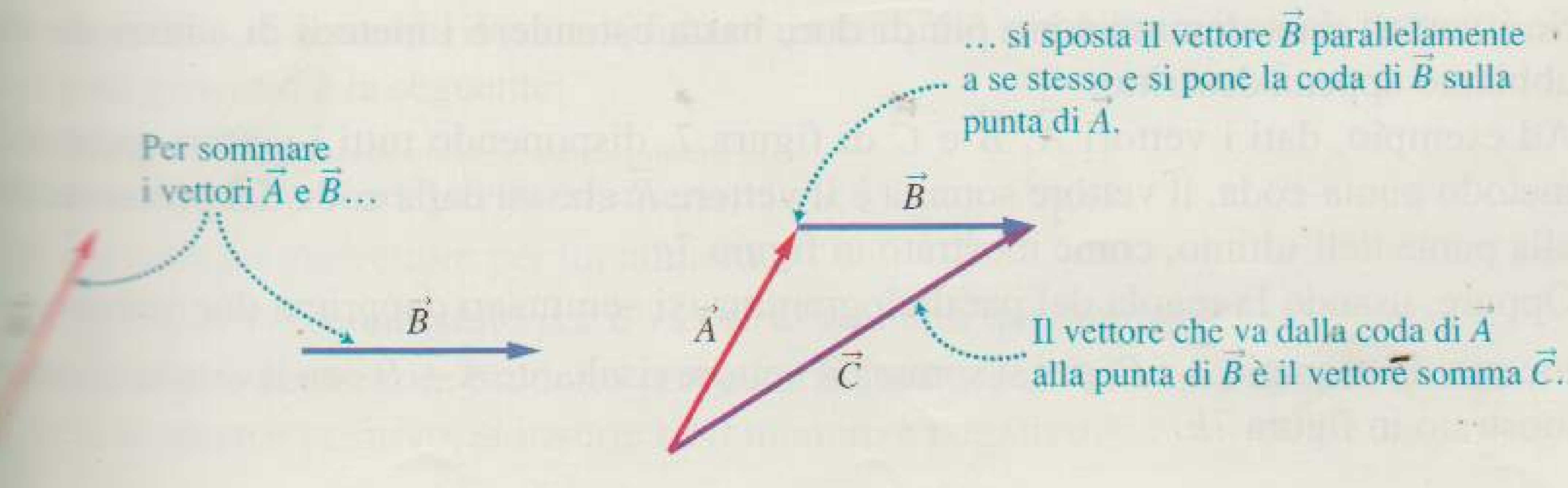


figura 4

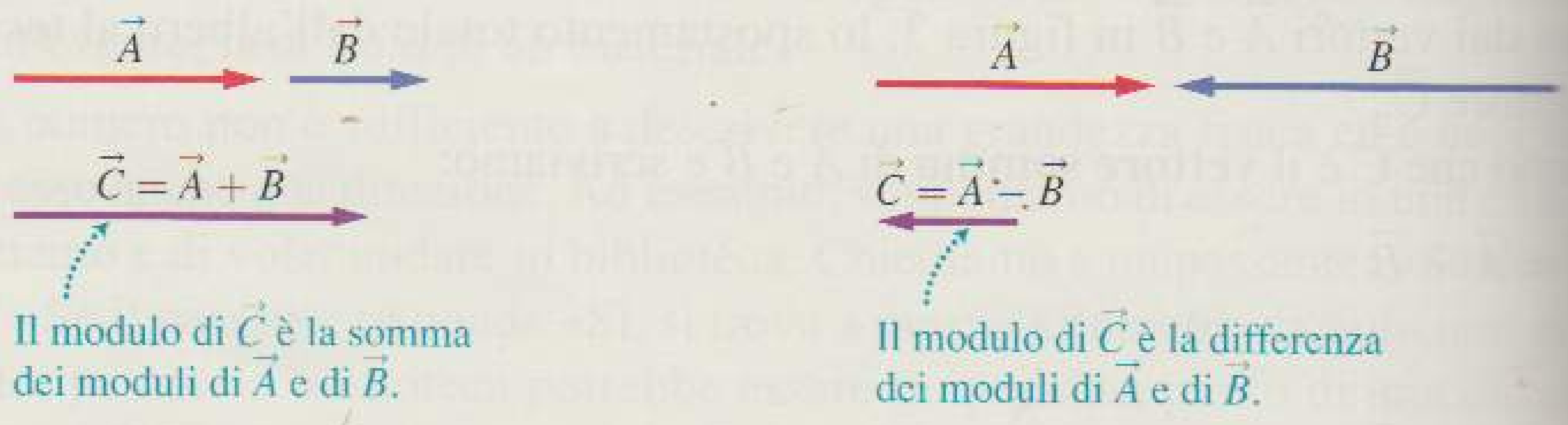
Somma di due vettori con il metodo punta coda

PLUS
Laboratorio *I vettori con GeoGebra*

Somma di vettori che hanno la stessa direzione

Nel caso particolare in cui si sommano due vettori che hanno *uguale direzione*, il vett[...] somma ha la stessa direzione. Per ciò che riguarda il suo modulo e il suo verso, la reg[...] è la seguente(fig. 5):

- se i due vettori hanno versi uguali, il vettore somma ha come modulo la somma dei moduli dei due vettori e lo stesso verso.
- se i due vettori hanno verso oppos[...] vettore somma ha come modulo la di[...]ferenza dei moduli dei due vetto[...] come verso quello del vettore che h[...] modulo maggiore.



a) Stesso verso

b) Verso opposto

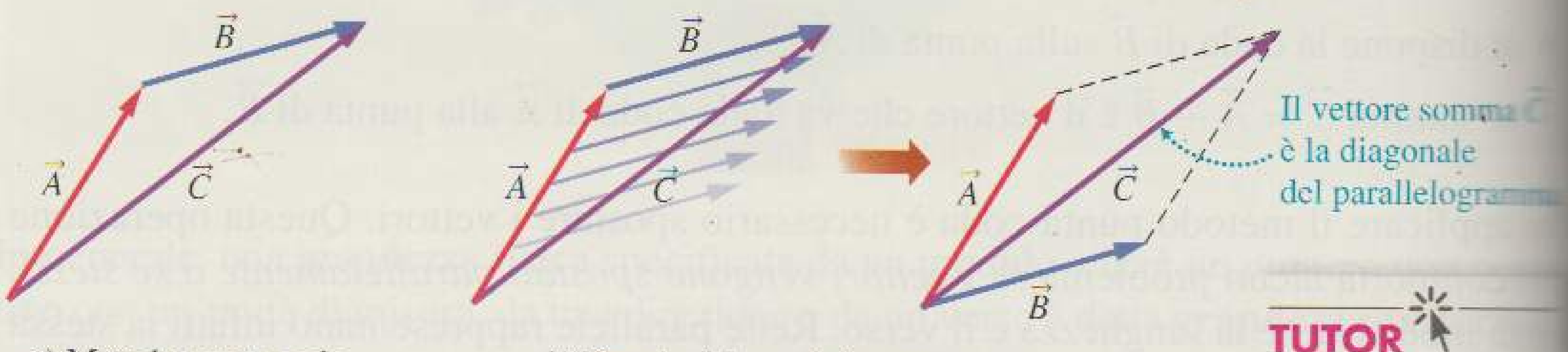
figura 5
Somma di vettori con la stessa direzione

ATTENZIONE
Il modulo della somma di due vettori *non* è uguale alla somma dei moduli dei vettori, a meno che questi vettori non abbiano la stessa direzione e lo stesso verso.

Regola del parallelogramma

Consideriamo i due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ di figura 6*a* e il loro vettore somma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ otte[...]nuto con il metodo punta-coda. Se spostiamo parallelamente a se stessa la freccia ch[...] rappresenta $\vec{B}$ in modo che la sua coda coincida con quella di $\vec{A}$, troviamo che $\vec{C}$ è la diagonale del parallelogramma che ha come lati $\vec{A}$ e $\vec{B}$ (figura 6*b*).
Abbiamo scoperto così un altro metodo per costruire la somma di due vettori, noto com[...] **regola del parallelogramma**:

Somma di due vettori: regola del parallelogramma
Per sommare i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$:
- si fanno coincidere le loro code e si disegna il parallelogramma che ha i due vettori come lati;
- la somma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ è la diagonale del parallelogramma.



a) Metodo punta-coda

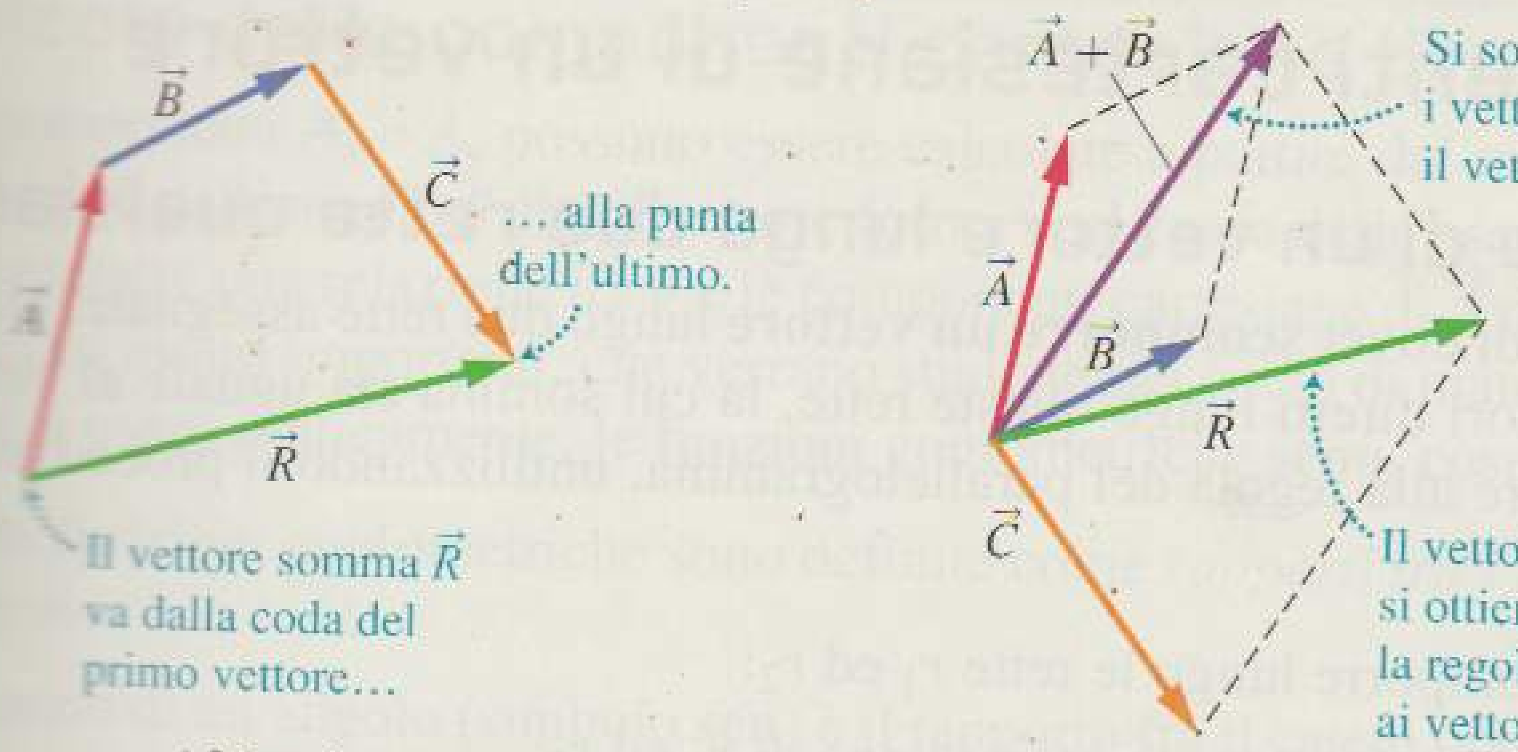
b) Regola del parallelogramma

TUTOR
Disegno attivo

figura 6
Regola del parallelogramma
Il vettore somma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ottenuto con il metodo punta-coda oppure, facendo coincidere la coda di $\vec{B}$ con quella di $\vec{A}$, mediante la regola del parallelogramma.

Somma di più vettori

Se i vettori da sommare sono più di due, basta estendere i metodi di addizione che abbiamo appena descritto.
Ad esempio, dati i vettori $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ di figura 7, disponendo tutti i vettori secondo il metodo punta-coda, il vettore somma è il vettore $\vec{R}$ che va dalla coda del primo vettore alla punta dell'ultimo, come mostrato in figura 7*a*.
Oppure, usando la regola del parallelogramma, si sommano dapprima due vettori qualunque, ad esempio $\vec{A}$ e $\vec{B}$, poi si somma il vettore risultante $\vec{A} + \vec{B}$ con il vettore $\vec{C}$, come mostrato in figura 7*b*.



a) Metodo punta-coda

b) Regola del parallelogramma

TUTOR
Disegno attivo

figura 7
Somma di più vettori

Differenza di due vettori

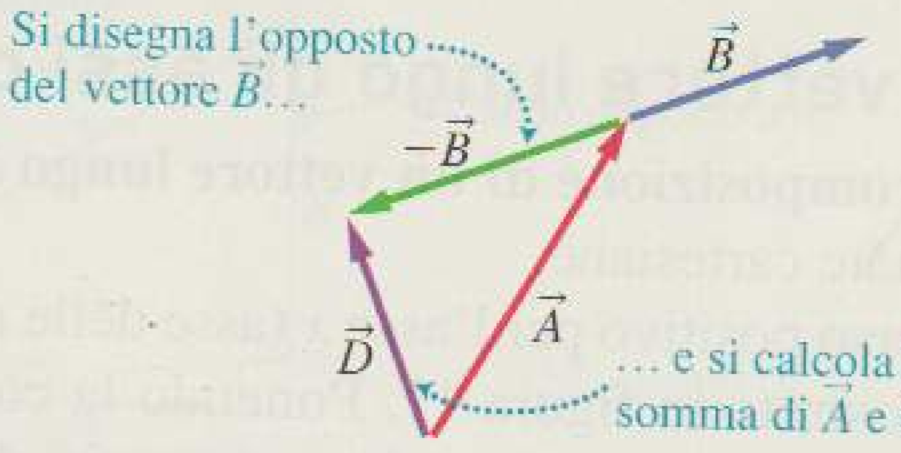
Vediamo ora come si sottraggono i vettori. Vogliamo determinare, ad esempio, il **vettore differenza** $\vec{D}$ dei due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ rappresentati in figura 8, cioè:

$$\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$$

Possiamo scrivere $\vec{D}$ nel modo seguente:

$$\vec{D}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

cioè come somma di $\vec{A}$ e $-\vec{B}$, dove il vettore $-\vec{B}$ è il **vettore opposto** di $\vec{B}$.
L'opposto di un vettore è rappresentato da una freccia della stessa lunghezza del vettore originale, ma orientata nel verso opposto.
Per sottrarre $\vec{B}$ da $\vec{A}$, cioè per calcolare il vettore $\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$, basta cambiare il verso di $\vec{B}$ e sommare il vettore così ottenuto ad $\vec{A}$, come indicato in figura 8.



TUTOR
Disegno attivo

figura 8
Differenza di vettori
Il vettore $\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$ è la somma del vettore $\vec{A}$ e del vettore $-\vec{B}$, opposto di $\vec{B}$.

La regola generale è la seguente:

Differenza di due vettori

Per sottrarre un vettore $\vec{B}$ da un vettore $\vec{A}$:
- si costruisce il vettore $-\vec{B}$, che è l'opposto di $\vec{B}$;
- il vettore differenza $\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$ è la somma dei vettori $\vec{A}$ e $-\vec{B}$.

Prodotto di un vettore per un numero

Un'altra operazione che può essere effettuata su un vettore è la sua **moltiplicazione per un numero**.
Come mostrato in figura 9, ad esempio, moltiplicando un vettore per 3 si aumenta di un fattore 3 il suo modulo, ma non si cambiano direzione e verso; moltiplicando il vettore per -3, invece, si aumenta il suo modulo di un fattore 3 e si *inverte* il verso del vettore.
La regola generale è la seguente:

Prodotto di un vettore per un numero

Per moltiplicare un vettore per un numero:
- si moltiplica il suo modulo per il valore assoluto di quel numero;
- la direzione del vettore prodotto non cambia, mentre il suo verso rimane lo stesso se il numero è positivo, si inverte se il numero è negativo.

PLUS
Approfondimento
Prodotto scalare e prodotto vettoriale.

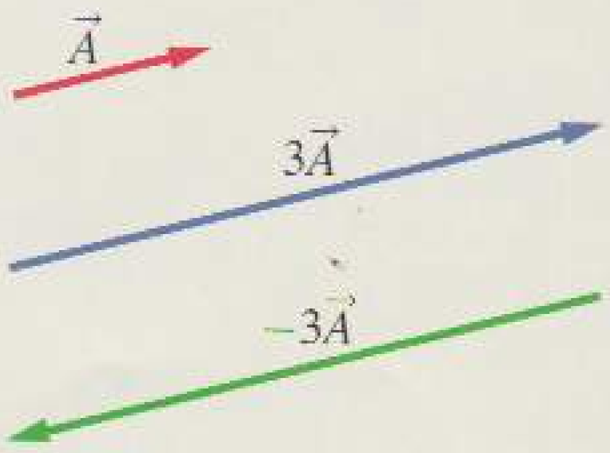


figura 9
Prodotto di un vettore per un numero
Vettori $\vec{A}$, $3\vec{A}$ e $-3\vec{A}$.

3. Componenti cartesiane di un vettore

Scomposizione di un vettore lungo due rette qualsiasi

In fisica capita spesso di dover **scomporre un vettore** lungo due rette assegnate, cioè di dover trovare due vettori diretti lungo queste rette, la cui somma sia uguale al vettore dato. Per farlo si ricorre alla regola del parallelogramma, untilizzando il procedimento illustrato in figura 10.

Se $\vec{A}$ è il vettore da scomporre lungo le rette r_1 ed r_2:

1. poniamo la coda di $\vec{A}$ nel punto di intersezione di r_1 ed r_2;
2. tracciamo le parallele a r_1 ed r_2 passanti per la punta di $\vec{A}$;
3. i lati del parallelogramma che si ottiene, orientati a partire dalla coda di $\vec{A}$, rappresentano i vettori cercati, cioè i vettori $\vec{A}_1$ e $\vec{A}_2$ che hanno come somma $\vec{A}$:

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{A}$$

TUTOR
Disegno attivo

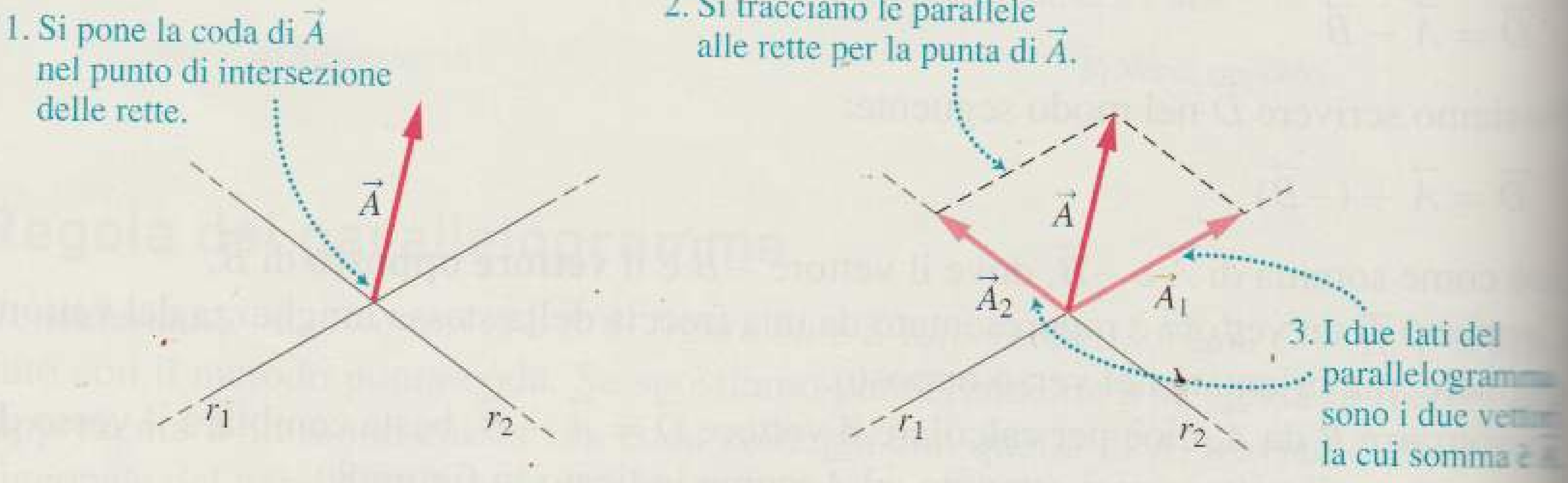


figura 10
Scomposizione di un vettore lungo due rette

Scomposizione di un vettore lungo gli assi cartesiani

Di particolare importanza è la **scomposizione di un vettore lungo i due assi perpendicolari** di un sistema di coordinate cartesiane.
Scegliamo un'origine, O, e un verso positivo per l'asse x (asse delle ascisse) e per l'asse y (asse delle ordinate), come mostrato in figura 11. Ponendo la coda di un vettore nell'origine e disegnando le parallele agli assi x e y che passano per la punta di $\vec{A}$, si trovano due vettori *perpendicolari* $\vec{A}_x$ e $\vec{A}_y$ la cui somma è $\vec{A}$:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

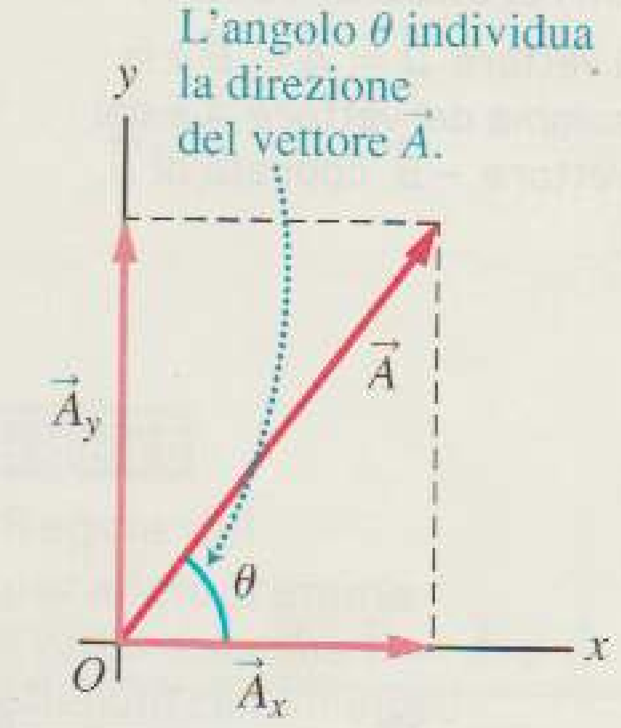
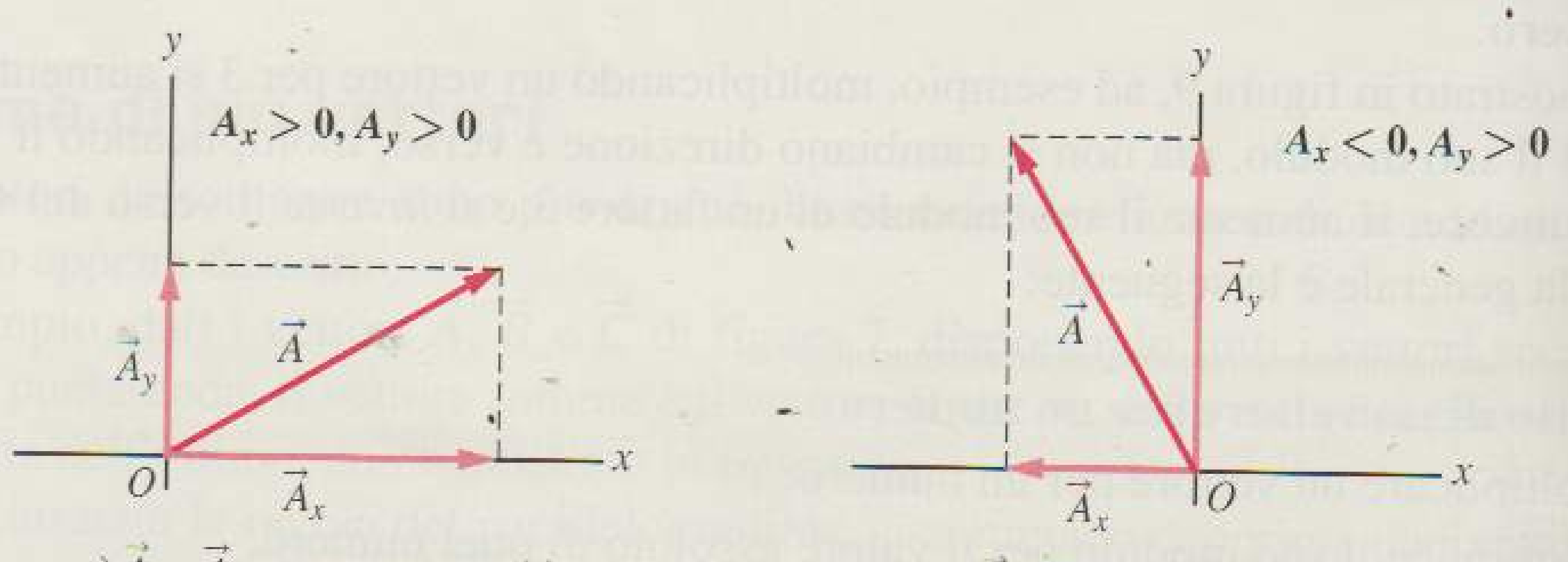


figura 11
Componenti cartesiane di un vettore

La direzione di $\vec{A}$ nel sistema cartesiano è individuata dall'angolo θ che il vettore forma con l'asse delle ascisse.
I moduli A_x e A_y dei due vettori $\vec{A}_x$ e $\vec{A}_y$ sono le **componenti cartesiane** del vettore e ad esse è attribuito un *segno positivo o negativo* a seconda che i vettori $\vec{A}_x$ e $\vec{A}_y$ siano diretti nel verso positivo o nel verso negativo degli assi x e y, rispettivamente. La situazione è illustrata in figura 12.



a) $\vec{A}_x$ e $\vec{A}_y$ puntano entrambi nel verso positivo, quindi $A_x > 0$ e $A_y > 0$.

b) $\vec{A}_x$ punta nel verso negativo dell'asse x, quindi $A_x < 0$.

figura 12
Vettori con componenti di diverso segno

OperativaMente

Calcolo delle componenti di un vettore

Che cosa devi sapere

In un triangolo rettangolo:

- il **seno** di un angolo è dato dal rapporto fra il cateto opposto all'angolo e l'ipotenusa;
- il **coseno** di un angolo è dato dal rapporto fra il cateto adiacente all'angolo e l'ipotenusa.

Che cosa devi fare

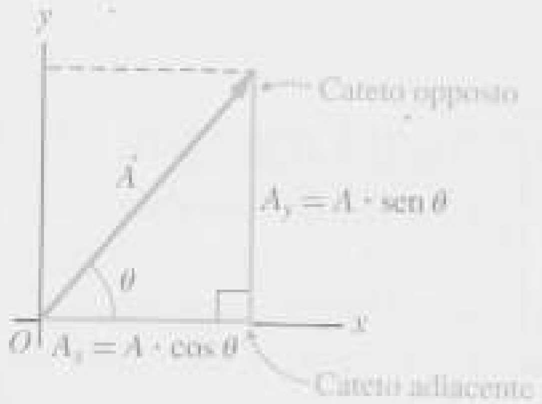
Per **calcolare le componenti cartesiane** A_x e A_y di un vettore $\vec{A}$ di modulo A utilizza la seguente procedura:

1. Disegna un riferimento cartesiano con l'origine nella coda del vettore $\vec{A}$.
2. Individua l'angolo θ che il vettore $\vec{A}$ forma con l'asse delle x.
3. Individua il cateto adiacente all'angolo θ, che rappresenta la componente A_x, e il cateto opposto all'angolo θ, che rappresenta la componente A_y.
4. Esprimi il coseno dell'angolo θ come rapporto e ricava la componente A_x:

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}} = \frac{A_x}{A} \qquad \text{da cui} \qquad \boldsymbol{A_x = A \cdot \cos\theta}$$

5. Esprimi il seno dell'angolo θ come rapporto e ricava la componente A_y:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}} = \frac{A_y}{A} \qquad \text{da cui} \qquad \boldsymbol{A_y = A \cdot \text{sen}\,\theta}$$



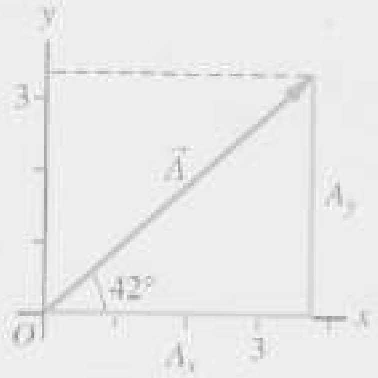
TUTOR
Operativamente

Prova tu

Scrivi le componenti cartesiane di un vettore $\vec{A}$ di modulo 5,00 cm, che forma un angolo di 42° con l'asse x.

Utilizza la procedura:

1.-2.-3. Disegna il vettore $\vec{A}$, individua l'angolo θ e le componenti A_x e A_y.



4. Ricava la componente A_x:

$$A_x = A \cdot \cos\theta = (5{,}00\ \text{cm}) \cdot \cos 42° = 3{,}72\ \text{cm}$$

5. Ricava la componente A_y:

$$A_y = A \cdot \text{sen}\,\theta = (5{,}00\ \text{cm}) \cdot \text{sen}\,42° = 3{,}35\ \text{cm}$$

Le stesse relazioni si utilizzano per risolvere anche il problema inverso, cioè **calcolare il modulo di un vettore e l'angolo che identifica la sua direzione**, conoscendo le componenti cartesiane del vettore, come mostrato nella scheda OperativaMente che segue.

OperativaMente

Calcolo del modulo e della direzione di un vettore

Che cosa devi sapere

In un triangolo rettangolo:
- se si conoscono i due cateti, l'**ipotenusa** si ottiene applicando il teorema di Pitagora;
- la **tangente** di un angolo è data dal rapporto fra il cateto opposto all'angolo e il cateto adiacente.

Che cosa devi fare

Per **calcolare il modulo e la direzione** di un vettore $\vec{A}$ di cui conosci le componenti A_x e A_y, fai riferimento al triangolo rettangolo individuato dal vettore e dalle sue componenti e utilizza la seguente procedura:

1. Individua l'angolo θ che il vettore $\vec{A}$ forma con l'asse delle x.

TUTOR
Operativamente

2. Calcola il modulo A del vettore applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo:

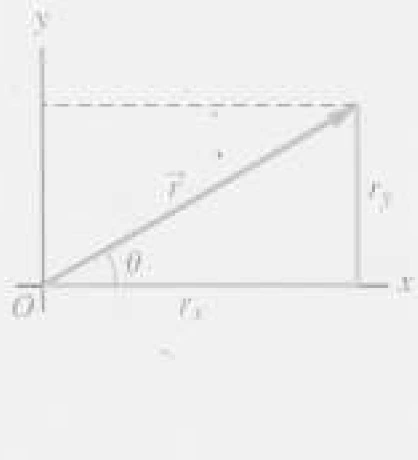
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

3. Calcola l'angolo θ che determina la direzione del vettore $\vec{A}$ utilizzando la relazione che esprime la tangente dell'angolo come rapporto fra le due componenti e poi determinando con la calcolatrice la **funzione inversa**, indicata con $\mathbf{tg^{-1}}$:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}} = \frac{A_y}{A_x} \qquad \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

ESERCIZIO

1. Il vettore $\vec{r}$ disegnato in figura ha modulo $r = 1{,}50$ cm. Se l'angolo θ è di 25°, quali sono le componenti cartesiane di $\vec{r}$?



Le componenti cartesiane r_x e r_y del vettore $\vec{r}$ si ottengono applicando le relazioni $r_x = r \cdot \cos\theta$ e $r_y = r \cdot \operatorname{sen}\theta$. Abbiamo quindi:

$$r_x = r \cdot \cos\theta = (1{,}50\ \text{m}) \cdot \cos 25° = (1{,}50\ \text{m}) \cdot 0{,}9063 = 1{,}36\ \text{m}$$

$$r_y = r \cdot \operatorname{sen}\theta = (1{,}50\ \text{m}) \cdot \operatorname{sen} 25° = (1{,}50\ \text{m}) \cdot 0{,}4226 = 0{,}634\ \text{m}$$

Per verifica risolviamo il problema inverso: date le componenti $r_x = 1{,}36$ m ed $r_y = 0{,}634$ m calcoliamo il modulo e la direzione di $\vec{r}$.

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(1{,}36\ \text{m})^2 + (0{,}634\ \text{m})^2} = 1{,}50\ \text{m}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r_y}{r_x} = \frac{0{,}634}{1{,}36} = 0{,}4662 \quad \rightarrow \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1}(0{,}4662) = 25°$$

Osserviamo infine che in questo testo ci limiteremo a usare praticamente le funzi seno, coseno e tangente, calcolando i loro valori con la calcolatrice, come illustrato ne scheda OperativaMente che segue.

OperativaMente

Calcolo delle funzioni goniometriche con la calcolatrice scientifica

Che cosa devi sapere

In una calcolatrice scientifica per il calcolo delle funzioni seno, coseno e tangente si ut lizzano i tasti [sin], [cos] e [tan].

- Alcune calcolatrici scientifiche richiedono di inserire prima la funzione e poi il numer altre prima il numero e poi la funzione. Per sapere come funziona la tua calcolatric puoi provare con funzioni e numeri semplici, ad esempio calcolando $\sqrt{4}$: scoprirai co se devi prima schiacciare il tasto [√] e poi il tasto [4] o viceversa. Negli esempi ch seguono utilizzeremo il primo tipo di calcolatrice.
- Prima di utilizzare le funzioni goniometriche devi inoltre accertarti che *la calcolatric sia impostata per lavorare con l'unità di misura degli angoli in gradi*: sul quadrant deve comparire **DEG** o **D** (e non RAD o R, oppure GRAD o G, da non confondere co gradi!).
- Negli esempi e negli esercizi di questo testo **utilizzeremo 4 cifre decimali per i valor delle funzioni goniometriche e approssimeremo i gradi all'unità.**

Che cosa devi fare

1. Per **calcolare il seno di un angolo**: digita [sin] e poi il valore dell'angolo.

Esempio
Per calcolare sen 40° digita:

[sin] 40 [=]   ottieni 0,6428

(il display ti dà 0,64278761, che approssimi a 0,6428 in base alla scelta fatta di mantener 4 cifre decimali).

2. Per **calcolare il coseno di un angolo**: digita [cos] e poi il valore dell'angolo.

Esempio
Per calcolare cos 82° digita:

[cos] 82 [=]   ottieni 0,1392

(il display ti dà 0,139173101 che approssimi a 0,1392).

3. Per **calcolare un angolo conoscendo la tangente**: digita [2nd] (o [SHIFT]), poi [tan] successivamente il valore dell'angolo.

Esempio
Per calcolare tg^{-1} (0,5773) digita:

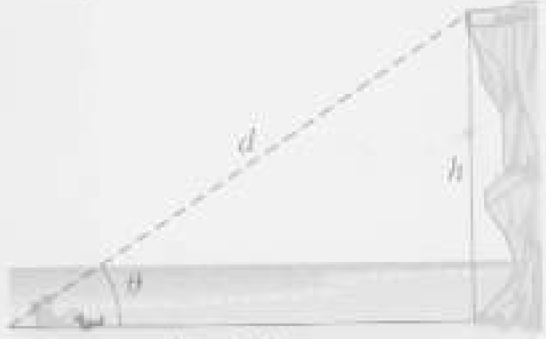
[2nd] [tan] 0,5773 [=]   ottieni 29,9978° che, per la scelta fatta, approssimi a 30°

Problem solving 1

L'altezza della scogliera

Nel libro *L'isola misteriosa* di Jules Verne, il capitano Cyrus Smith vuole determinare l'altezza di una scogliera. Egli si mette con le spalle alla base della scogliera, poi cammina dritto davanti a sé per 500 m; a questo punto si sdraia per terra e misura l'angolo fra la linea orizzontale e la direzione in cui vede la cima della scogliera. Se l'angolo è di 34°, quanto è alta la scogliera?

In figura è disegnato il triangolo rettangolo che rappresenta il modello del problema. Il lato opposto all'angolo θ è l'altezza h della scogliera che dobbiamo determinare, mentre il lato adiacente all'angolo è la distanza $b = 500$ m fra la base della scogliera e il capitano Smith. Infine l'ipotenusa del triangolo è la distanza d fra la cima della scogliera e il capitano Smith.



Usiamo la funzione coseno e la relazione tra cateti, ipotenusa e angoli di un triangolo rettangolo.

Dalla relazione $b = d \cdot \cos\theta$ calcoliamo d:

$$d = \frac{b}{\cos\theta} = \frac{500 \text{ m}}{\cos 34°} = 603 \text{ m}$$

Usando il teorema di Pitagora possiamo ora ricavare l'altezza h:

$$h = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{(603 \text{ m})^2 - (500 \text{ m})^2} = 337 \text{ m}$$

Per calcolare l'altezza h è fondamentale conoscere la distanza b del punto di osservazione dalla base della scogliera, quindi la scogliera deve essere accessibile.

Se θ fosse di 30°, a quale distanza si troverebbe Cyrus Smith dalla base della scogliera? [522 m]

... vettoriale per componenti

... della rappresentazione cartesiana dei vettori sta nel fatto che, usando le ... cartesiane, diventa piuttosto facile sommare i vettori. Infatti:

... vettoriale per componenti

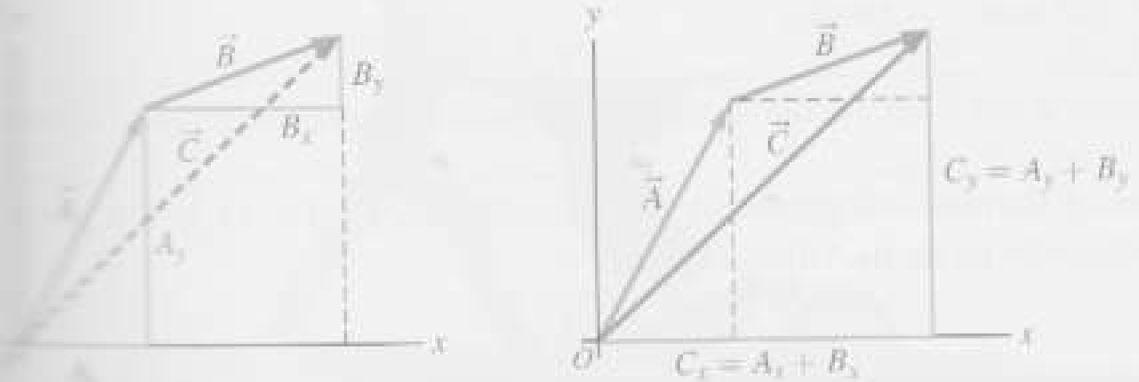
... due o più vettori basta sommare le loro componenti.

... illustrato in figura 14. Se $\vec{C}$ è la somma di $\vec{A}$ e $\vec{B}$, cioè $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, le componenti cartesiane di $\vec{C}$ sono date da:

$$C_x = A_x + B_x \qquad C_y = A_y + B_y$$

... il modulo di $\vec{C}$ si applica la formula $C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$.

TUTOR
Disegno attivo



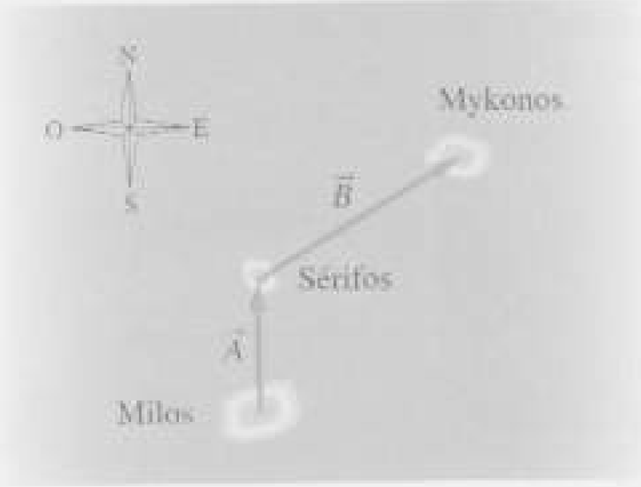
a) Componenti di $\vec{A}$ e $\vec{B}$ — b) Componenti di $\vec{C}$

figura 14
Somma di vettori mediante le loro componenti cartesiane

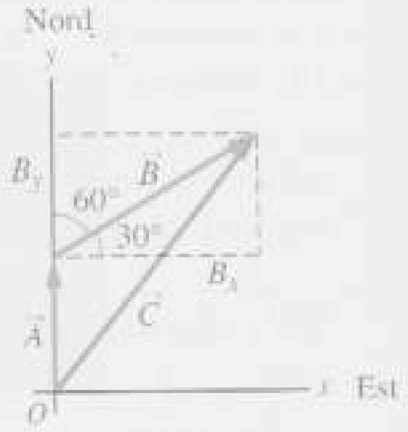
Problem solving 2

Veleggiando nell'Egeo

Andrea e Barbara stanno veleggiando nel Mar Egeo. Un giorno partono dall'isola di Milos e si dirigono a nord, verso l'isola di Sérifos, a 24 miglia di distanza (un miglio nautico, simbolo nmi, corrisponde a 1852 m). Il giorno dopo partono da Sérifos e puntano su Mykonos, che dista 42 miglia, con rotta 60° (il che vuol dire, nel linguaggio navale, che la rotta forma un angolo di 60° con la direzione nord in senso orario). Qual è il modulo dello spostamento complessivo di Andrea e Barbara?



a)



b) Modello del problema

Descrizione del problema — In figura *a* sono tracciati i vettori spostamento da Milos a Sérifos ($\vec{A}$) e da Sérifos a Mykonos ($\vec{B}$). I moduli di questi vettori sono 24 nmi e 42 nmi, rispettivamente. Continueremo a usare le miglia nautiche come unità di misura della lunghezza. Dobbiamo determinare il modulo dello spostamento totale $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ da Milos a Mykonos.

Strategia — Costruiamo il modello del problema (fig. *b*). Poniamo l'origine di un sistema di assi cartesiani nel punto di partenza (Milos). Gli assi sono orientati in modo che le ascisse puntino a est e le ordinate a nord. Calcoliamo le componenti cartesiane di $\vec{A}$ e $\vec{B}$, osservando che $\vec{A}$ è diretto lungo l'asse y e $\vec{B}$ forma con l'asse orizzontale un angolo di 30°. Le componenti C_x e C_y di $\vec{C}$ sono la somma delle componenti A_x e A_y di $\vec{A}$ e B_x e B_y di $\vec{B}$. A partire da C_x e C_y determiniamo C usando il teorema di Pitagora.

Soluzione — Le componenti di $\vec{A}$ sono:

$$A_x = 0 \text{ nmi} \qquad A_y = 24 \text{ nmi}$$

Le componenti di $\vec{B}$ sono:

$$B_x = (42 \text{ nmi}) \cdot \cos 30° = 36 \text{ nmi} \qquad B_y = (42 \text{ nmi}) \cdot \text{sen } 30° = 21 \text{ nmi}$$

Le componenti di $\vec{C}$ si ottengono sommando quelle di $\vec{A}$ e quelle di $\vec{B}$:

$$C_x = A_x + B_x = (0 + 36) \text{ nmi} = 36 \text{ nmi}$$
$$C_y = A_y + B_y = (24 + 21) \text{ nmi} = 45 \text{ nmi}$$

Il modulo di $\vec{C}$ è dato da $C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$:

$$C = \sqrt{(36 \text{ nmi})^2 + (45 \text{ nmi})^2} = 58 \text{ nmi}$$

Osservazioni — Il modulo dello spostamento *non* è uguale alla distanza percorsa dalla barca, che è $(24 + 42)$ nmi = 66 nmi.

Prova tu — Se da Mykonos Andrea e Barbara veleggiassero su Patros, 80 nmi a est di Mykonos, quale sarebbe il modulo del loro spostamento totale da Milos a Patros? [124 nmi]

Risolvi i PROBLEMI

Operazioni con i vettori

1. PROBLEMA SVOLTO

Dati due generici vettori non paralleli $\vec{A}$ e $\vec{B}$, determina graficamente il vettore $\vec{C}$ tale che $\vec{C}+\vec{A}+\vec{B}=0$.

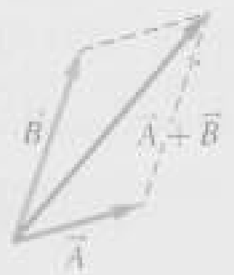
SOLUZIONE

Disegna i due vettori generici $\vec{A}$ e $\vec{B}$ non paralleli:

Dalla condizione data ricava $\vec{C}$:

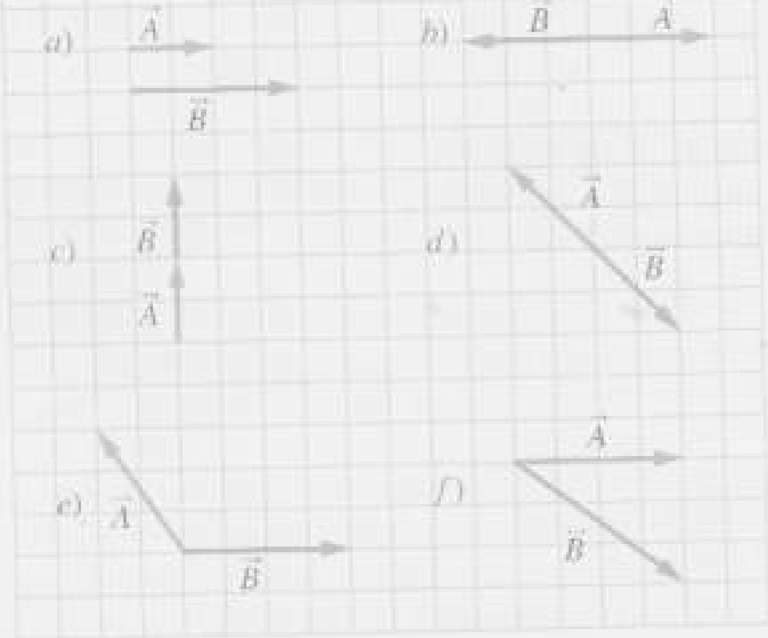
$$\vec{C}+\vec{A}+\vec{B}=0 \quad \rightarrow \quad \vec{C}=-(\vec{A}+\vec{B})$$

Determina il vettore somma $\vec{A}+\vec{B}$ con la regola del parallelogramma:



Disegna il vettore $\vec{C}$, che è l'opposto del vettore somma $\vec{A}+\vec{B}$:

2. Considera le coppie di vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ riportate in figura. Disegna, per ogni coppia, il vettore somma e il vettore differenza.



3. Facendo riferimento ai vettori disegnati in figura e utilizzando il metodo punta-coda per la somma dei vettori, rispondi alle seguenti domande:

a) il modulo di $\vec{A}+\vec{C}$ è maggiore, minore o uguale a quello di $\vec{A}+\vec{E}$?

b) Il modulo di $\vec{A}+\vec{E}$ è maggiore, minore o uguale a quello di $\vec{A}+\vec{D}$?

[*a*) minore; *b*) uguale]

4. La passeggiata del gatto

Nella sua passeggiata quotidiana, un gatto compie uno spostamento di 120 m verso nord, seguito da un altro di ... verso ovest. Disegna i vettori spostamento e determina il modulo dello spostamento totale.

5. Spesa al supermercato

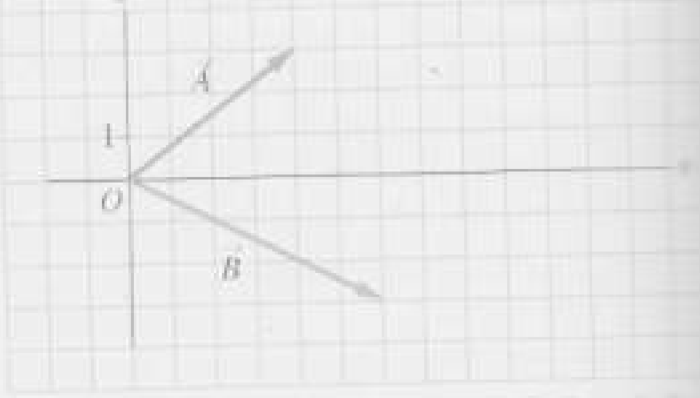
Mario va al supermercato a fare la spesa. Per trovare tutto ciò che gli serve si muove seguendo il percorso indicato dai vettori $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ e $\vec{D}$ nella figura. Sapendo che i vettori hanno modulo $A = 15{,}0$ m, $B = 13{,}5$ m, $C = 10{,}5$ m, $D = 4{,}0$ m, disegna i vettori su un foglio quadrettato e calcola lo spostamento totale di Mario.

Componenti cartesiane di un vettore

6. Dati i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ rappresentati in figura:

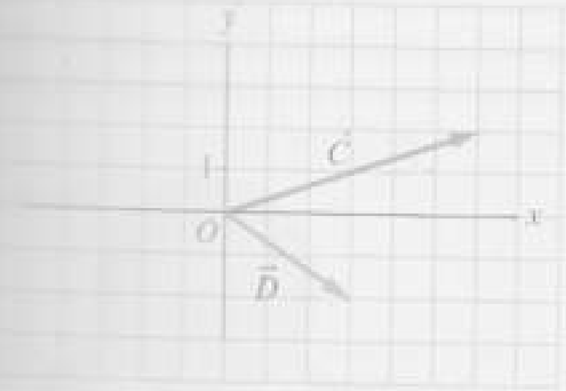
a) scrivi le loro componenti;

b) disegna il vettore somma $\vec{A}+\vec{B}$.



[$A_x = 4$, $A_y = 3$; $B_x = 6$, ...]

... vettori $\vec{C}$ e $\vec{D}$ rappresentati in figura:
... componenti;
... vettore differenza $\vec{A} - \vec{B}$.



[$C_x = 6$, $C_y = 2$; $D_x = 3$, $D_y = -2$]

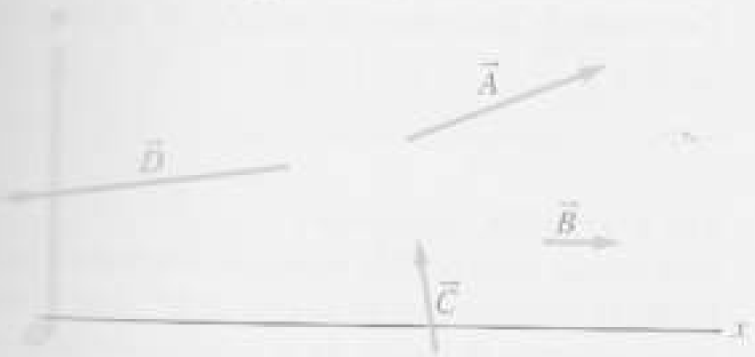
... riferimento cartesiano seguente un vettore $\vec{A}$ ... di 30°, di modulo 5 e un vettore $\vec{B}$ inclinato di ... di modulo 8. (*Suggerimento*: calcola le componenti ... dei vettori).

... vettore di modulo 12,1 m che punta nel verso ... positive e $\vec{B}$ è un vettore di modulo 32,2 m che ... verso delle y negative, quanto vale il modulo del vettore $2\vec{A} + \vec{B}$?

[40,3 m]

... vettori sono perpendicolari. Supponi che vengano ... moltiplicati per 2.
a) Come varia il modulo del vettore somma?
b) Come varia l'angolo di direzione del vettore somma?

... i vettori disegnati in figura:



a) Elenca i vettori in ordine crescente rispetto al loro modulo.
b) Elenca i vettori in ordine crescente rispetto alla loro componente x.

... vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ formano un angolo di 60°.
a) Qual è l'angolo che formano i vettori $\vec{A}$ e $-3\vec{B}$?
b) Qual è l'angolo che formano i vettori $-3\vec{A}$ e $\vec{B}$?

[a) 120°; b) 120°]

Il vettore $\vec{A}$ ha modulo 7,25 m. Calcola le componenti A_x e A_y del vettore nel caso in cui l'angolo di direzione sia:
a) $\theta = 5°$ b) $\theta = 125°$

[a) $A_x = 7,22$ m; $A_y = 0,632$ m; b) $A_x = -4,16$ m; $A_y = 5,94$ m]

14. Calcola il modulo e la direzione del vettore $\vec{A}$ di componenti $A_x = 75,5$ m e $A_y = 6,20$ m. [$A = 75,8$ m; $\theta = 5°$]

15. IN ENGLISH
A vector $\vec{A}$ has components $A_x = 12$ m and $A_y = 5$ m. What are the magnitude and the direction of $\vec{A}$?

[$A = 13$ m; $\theta = 22°$]

16. Gita in montagna
Un automobilista sta guidando su una lunga strada inclinata. Dopo 2,40 km nota che i segnali stradali a fianco della carreggiata indicano che la sua altitudine è aumentata di 160 metri.
a) Qual è l'angolo che la strada forma con il piano orizzontale?
b) Quanta strada deve ancora percorrere se vuole aumentare la sua altitudine di altri 45 metri?

[a) 3,76°; b) 690 m]

17. Il giocatore di baseball
Nel baseball il "diamante" è un quadrato di lato lungo 27 m. Se il verso positivo dell'asse x punta dalla casa base alla prima base e il verso positivo dell'asse y dalla casa base alla terza base, scrivi le componenti del vettore posizione $\vec{r}$ di un giocatore quando:
a) si trova in seconda base;
b) si trova in terza base;
c) ha fatto un giro completo ed è tornato alla casa base.

[a) $r_x = 27$ m, $r_y = 27$ m; b) $r_x = 0$ m, $r_y = 27$ m; c) $r_x = 0$ m, $r_y = 0$ m]

18. Le mosse del cavallo
Nella figura sono illustrate due delle mosse consentite al cavallo nel gioco degli scacchi. Se il lato dei quadrati della scacchiera è di 3,5 cm, determina il modulo e la direzione dello spostamento del cavallo per ognuna delle due mosse.

[mossa 1: $s = 7,8$ cm, $\theta = 153°$; mossa 2: $s = 7,8$ cm, $\theta = 63°$]

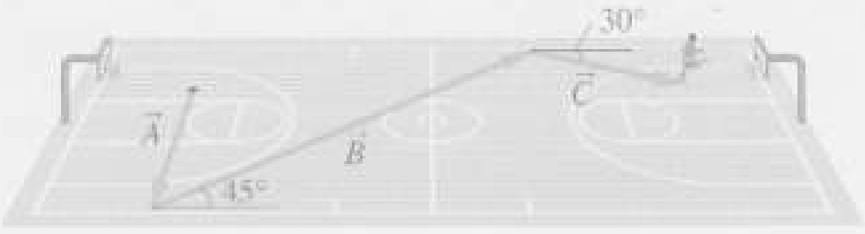
19. Passeggiata nel bosco
Un escursionista decide di fare una passeggiata in un bosco. Lascia l'auto in un posteggio e si avvia per un sentiero, spostandosi di 4,5 km in direzione nord-est e poi di 1,1 km in direzione sud. Di quanto si è spostato l'escursionista rispetto alla sua auto? In che direzione?

[3,8 km; 57° in direzione da nord a est]

20. IN ENGLISH

A basketball player runs down the court, following the path indicated by the vectors $\vec{A}$, $\vec{B}$, and $\vec{C}$ in figure.
The magnitudes of these three vectors are $A = 10{,}0$ m, $B = 20{,}0$ m and $C = 7{,}0$ m. Find the magnitude and direction of the net displacement of the player using:

a) the graphical method;
b) the component method of vector addition.



[$r = 20{,}2$ m; $\theta = 1{,}8°$]

21. Aerei in avvicinamento

Un operatore della torre di controllo osserva due aerei in avvicinamento all'aeroporto. La posizione dell'aereo 1 rispetto alla torre di controllo è individuata dal vettore $\vec{A}$, che ha modulo $A = 220$ km e punta in direzione 32° da ovest verso nord. La posizione dell'aereo 2 rispetto alla torre è individuata dal vettore $\vec{B}$, che ha modulo 140 km e punta in direzione 65° da nord verso est.

a) Disegna i vettori $\vec{A}$, $-\vec{B}$ e $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$. Osserva che il vettore $\vec{D}$ rappresenta la posizione dell'aereo 1 rispetto all'aereo 2.
b) Calcola modulo e direzione del vettore $\vec{D}$.

[*b*) $D = 320$ km; $\theta = 10°$ da ovest verso nord]

22. Le componenti x e y di un vettore $\vec{r}$ sono rispettivamente $r_x = 14$ m ed $r_y = -9{,}5$ m.

a) Determina direzione, verso e modulo del vettore $\vec{r}$.
b) Se r_x ed r_y vengono raddoppiate, come si modificano direzione, verso e modulo del vettore $\vec{r}$?

[*a*) $\theta = -34°$, cioè 34° sotto l'asse x; $r = 17$ m;
b) direzione e verso restano uguali, il modulo raddoppia]

23. Componenti di un vettore

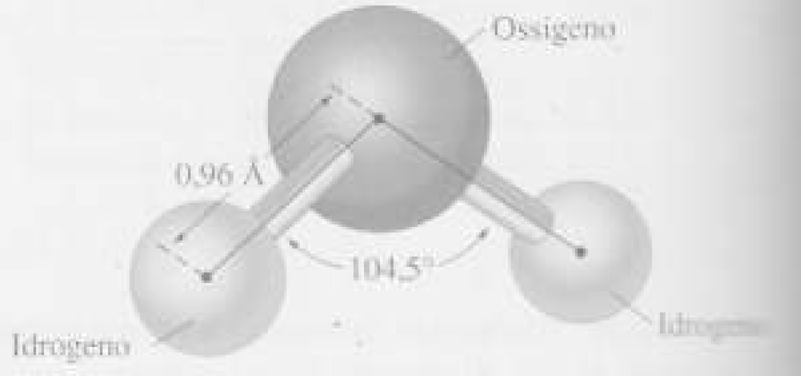
Il vettore $\vec{A}$ ha modulo pari a 50 unità ed è diretto lungo l'asse x positivo. Un secondo vettore, $\vec{B}$, ha modulo pari a 120 unità e direzione che forma un angolo di 70° al di sotto dell'asse x.
Quale tra i due vettori ha:

a) la componente x maggiore;
b) la componente y maggiore?

[*a*) $A_x > B_x$, infatti $A_x = 50$ unità, $B_x = 41$ unità;
b) $B_y > A_y$, infatti $A_y = 0$, $B_y = -113$ unità]

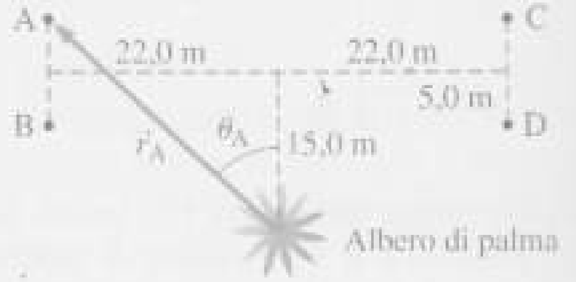
24. Molecola di acqua

La figura mostra schematicamente la struttura di una molecola di acqua. La distanza fra il centro dell'atomo di ossigeno e il centro dell'atomo di idrogeno è di 0,96 Å, l'angolo fra i due atomi di idrogeno è di 104,5°.
Determina la distanza fra i centri dei due atomi di idrogeno (1 Å = 10^{-10} m).



25. Caccia al tesoro

La mappa di un tesoro ti indica di partire da un albero di palma e di camminare verso nord per 15,0 m; poi di girarti di 90° e camminare per 22,0 m, quindi voltarti ancora di 90° e camminare per altri 5,00 m. Calcola la distanza dalla palma e la direzione relativa al nord per ognuno dei quattro possibili luoghi in cui si può trovare il tesoro.



[1) $r_A = 29{,}7$ m, $\theta_A = 47{,}7°$ da nord verso ...
2) $r_B = 24{,}2$ m, $\theta_B = 65{,}6°$ da nord verso ...
3) $r_C = 29{,}7$ m, $\theta_C = 47{,}7°$ da nord verso ...
4) $r_D = 24{,}2$ m, $\theta_D = 65{,}6°$ da nord verso ...]

26. Somma e differenza di vettori

Il vettore $\vec{A}$ punta nel verso negativo dell'asse y e ha modulo di 5 unità. Il vettore $\vec{B}$ ha modulo doppio e punta nel verso positivo dell'asse x.
Determina la direzione e il modulo dei seguenti vettori:

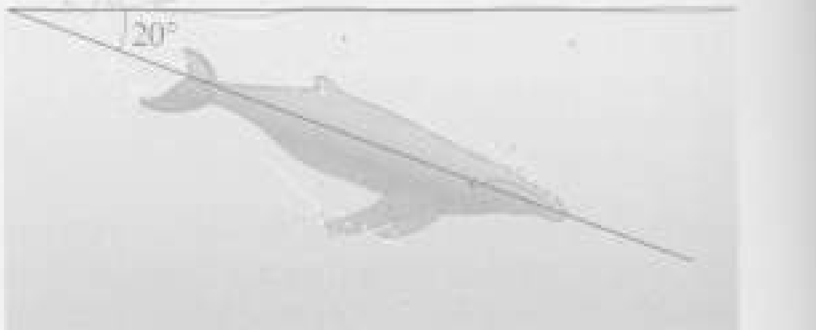
a) $\vec{A} + \vec{B}$ *b*) $\vec{A} - \vec{B}$ *c*) $\vec{B} - \vec{A}$

[*a*) $5\sqrt{5}$ unità, $-27°$; *b*) $5\sqrt{5}$ unità, $-153°$; *c*) $5\sqrt{5}$ unità, ...]

27. Che profondità raggiunge?

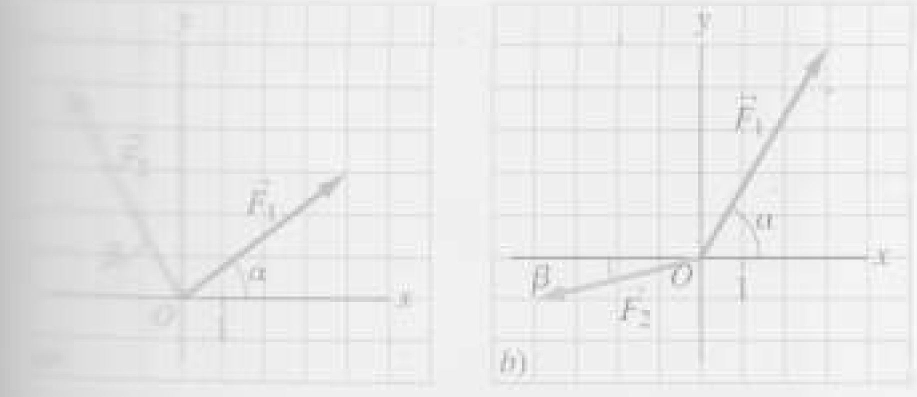
Una balena emerge dall'acqua per respirare e successivamente si immerge con un angolo di 20° sotto l'orizzontale, come mostrato in figura. Se la balena continua a muoversi in linea retta per 150 m:

a) che profondità raggiunge?
b) di quanto si è spostata orizzontalmente?



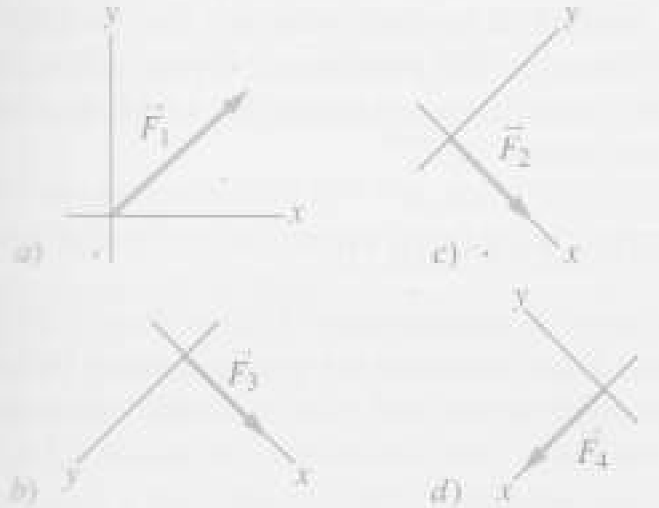
[*a*) 51,3 m; *b*) 14...]

Considera le forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ rappresentate nelle seguenti figure. In ciascuno dei casi scrivi le componenti cartesiane delle due forze. Calcola poi il modulo delle forze e l'angolo che ciascuna forza forma con l'asse delle x.

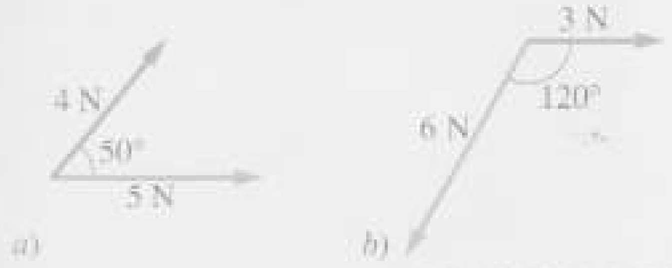


[a) $F_1 = 5$; $\alpha = 37°$; $F_2 = 5{,}8$; $\beta = 59°$; b) $F_1 = 5{,}8$; $\alpha = 59°$; $F_2 = 4{,}1$; $\beta = 14°$]

Scomponi le seguenti forze lungo gli assi indicati:

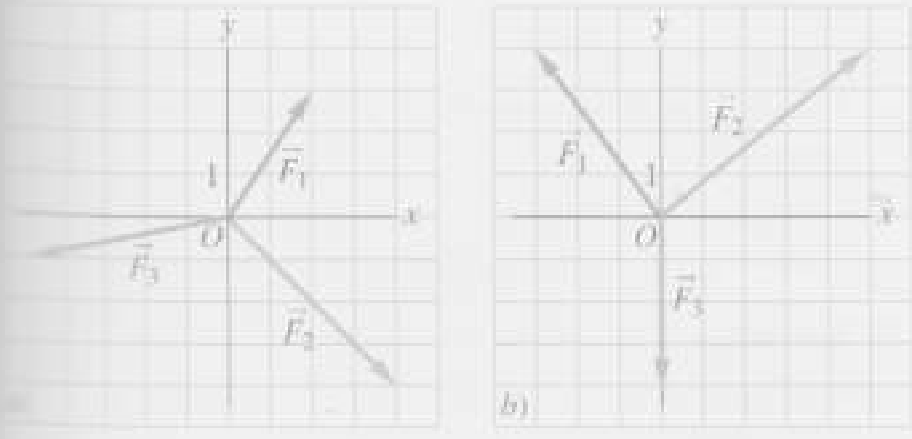


Considera le seguenti coppie di forze. In ciascuno dei due casi disegna su un foglio i due vettori in un opportuno sistema cartesiano, quindi determina graficamente l'intensità della risultante delle due forze. Controlla il valore ottenuto calcolando la risultante attraverso le componenti cartesiane dei due vettori.
Che direzione e verso ha la risultante rispetto all'asse x?



[a) 8 N; 22°; b) 5 N; 79°]

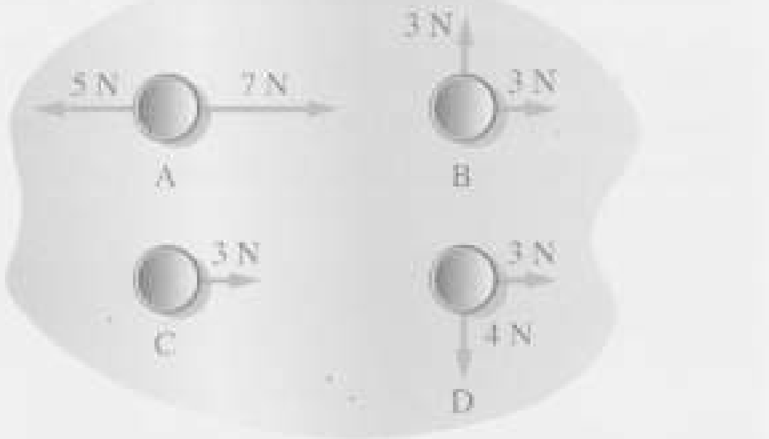
Considera le seguenti forze. In ciascuno dei casi disegna la forza risultante e determinane intensità e direzione.



[2,2 N; $\alpha = -63°$; b) 4,5 N; $\alpha = 65°$]

32. Disco da hockey

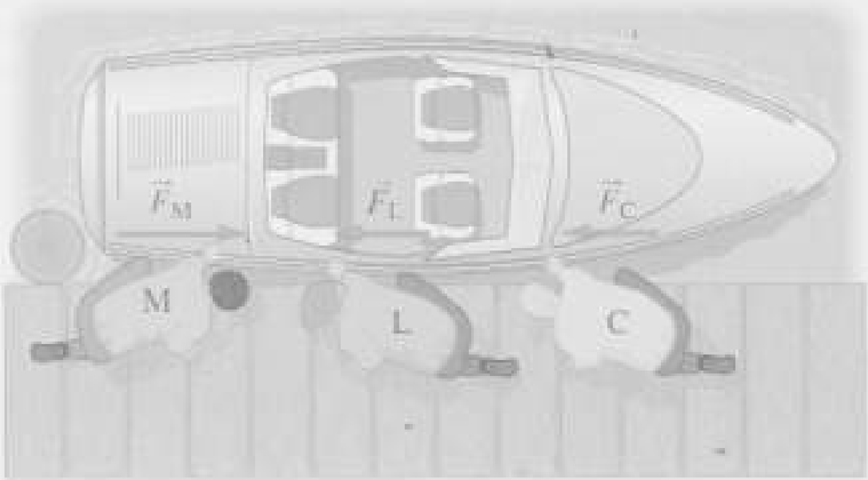
Un disco da hockey è sottoposto a una o più forze, come mostrato in figura. Disponi i quattro casi, A, B, C e D, in ordine crescente di modulo della forza che agisce sul disco.



[A < C < B < D]

33. Sul molo

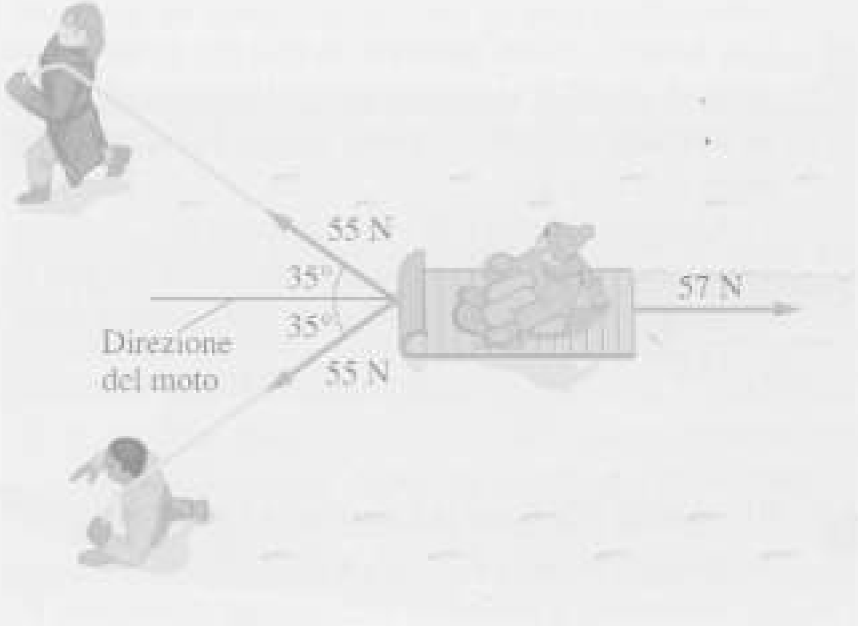
Marco (M), Luca (L) e Carlo (C) spingono una barca esercitando delle forze parallele al molo di intensità, rispettivamente, 90 N, 60 N e 60 N. Qual è la forza risultante $\vec{R}$ se Marco spinge verso la prua e Luca e Carlo spingono nel verso opposto?



[$\vec{R}$ è diretta verso la poppa e ha intensità 30 N]

34. Giochi sulla neve

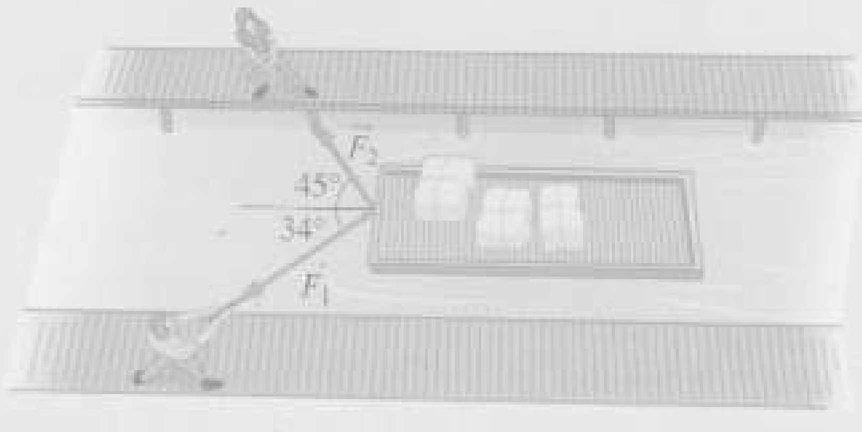
Due ragazzini tirano una slitta con una forza di 55 N secondo un angolo di 35° rispetto alla direzione del moto, come mostrato in figura. La neve esercita sulla slitta una forza resistente di modulo 57 N nella stessa direzione, ma in verso opposto a quello del moto. Determina la forza risultante $\vec{R}$.



[$\vec{R}$ ha direzione e verso del moto e intensità 33 N]

35. PROBLEMA SVOLTO

Due operai trainano una chiatta lungo un canale, come mostrato in figura. Un operaio tira con una forza $\vec{F}_1$ di modulo 130 N nella direzione che forma un angolo di 34° rispetto alla direzione in cui si muove la chiatta, l'altro operaio, sulla riva opposta del canale, tira nella direzione che forma un angolo di 45° rispetto alla direzione del moto.
Con quale forza $\vec{F}_2$ deve tirare il secondo operaio perché la forza risultante sia nella direzione e nel verso del moto?



SOLUZIONE

Considera un sistema di assi cartesiani con l'origine nel punto di applicazione delle due forze.
Per far andare la chiatta nella direzione del moto è necessario che le componenti lungo l'asse y delle forze con cui tirano i due operai siano uguali, in modo che la componente lungo l'asse y della risultante sia nulla:

$$F_{1y} = F_{2y}$$

Calcola la componente lungo l'asse y della forza $\vec{F}_1$:

$$F_{1y} = (130\ \text{N})\ \text{sen}\ 34° = 72{,}7\ \text{N}$$

La componente lungo l'asse y della forza $\vec{F}_2$ deve essere uguale, quindi:

$$F_{2y} = F_{1y} = 72{,}7\ \text{N}$$

Utilizza la relazione:

$$F_{2y} = F_2\ \text{sen}\ 45°$$

per calcolare l'intensità della forza $\vec{F}_2$:

$$F_2 = \frac{F_{2y}}{\text{sen}\ 45°} = \frac{72{,}7\ \text{N}}{0{,}7071} = 103\ \text{N}$$

36. Una forza $\vec{F}_1$ ha un'intensità di 40,0 N e punta in una direzione di 20° al di sotto dell'asse x. Una seconda forza $\vec{F}_2$ ha un'intensità di 75,0 N e punta in una direzione di 50° al di sopra dell'asse x.
   a) Disegna le forze e la loro risultante $\vec{R}$.
   b) Usando il metodo della somma vettoriale per componenti, determina il modulo e la direzione della risultante.
   [R = 96,3 N; 27° al di sopra dell'asse x]

37. Riferendoti alle forze del problema precedente:
   a) disegna le forze $\vec{F}_1$, $-\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3 = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$;
   b) determina il modulo e la direzione della forza $\vec{F}_3$.
   [*b*) 72,0 m; 98° al di sotto dell'asse x]

La forza peso

38. **Bullone lunare**
Qual è il peso sulla Terra e sulla Luna di un bull... massa $m = 32$ g? [0,31 N sulla Terra; 0,052 N ...

39. **Cubo di acciaio**
La densità dell'acciaio è di $7{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3. Qu... un cubo di acciaio di 10 cm di lato?

40. **Sulla Luna**
Un ragazzo ha una massa di 45 kg. Quale sarebbe ... peso sulla Luna, dove $g = 1{,}62$ m/s^2?

41. **Sulla Terra**
Un astronauta pesa 99,0 N sulla Luna, dove l'acce... di gravità è 1,62 m/s^2. Quanto pesa sulla Terra?

42. **Il carrello della spesa**
Due ragazzi vanno a fare la spesa e mettono ... 2 bottiglie di succo di frutta da 1 litro (densità ... 5 yogurt da 125 g ciascuno e 2 pacchi di gelato ... Se il carrello ha una massa di 14,0 kg, quanto pe... rello pieno?

43. PROBLEMA SVOLTO

Nella serie di documentari *Pole to Pole*, l'attore ... Michael Palin, membro del gruppo Monty Python, ... dal polo nord al polo sud attraversando l'equatore ... Michael porta con sé uno zaino di massa 6,5 kg. ... che la costante di gravità al polo nord è g_{polo} = ... e all'equatore $g_{eq} = 9{,}78$ N/kg:
a) **di quanto si alleggerisce lo zaino di Michael ... all'equatore?**
b) **Qual è la variazione percentuale del peso?**

SOLUZIONE

a) Calcola la differenza fra il peso dello zaino al po... quatore:

$$P_{polo} - P_{eq} = m(g_{polo} - g_{eq}) = $$
$$= (6{,}5\ \text{kg})(9{,}83 - 9{,}78)\ \text{N/kg} = ...$$

b) Determina la variazione percentuale del peso:

$$\frac{P_{polo} - P_{eq}}{P_{polo}} = \frac{0{,}33\ \text{N}}{(6{,}5\ \text{kg})(9{,}83\ \text{N/kg})} = 0{,}5\%$$